Math. P.
2c

Abhandlungen

Neun Abhandlungen

über

eben so wichtige als interessante Gegenstände

aus der

Algebra und niedern Analysis.

Für höhere Lehranstalten, sowie vorzüglich zum Selbstunterrichte.

Von den Professoren

Lefébure de Fourcy, M. Vincent,
L. F. Ritter.

Stuttgart.

E. Schweizerbart'sche Verlagshandlung.

1844.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

In den meisten älteren, neueren und neuesten, deutschen und französischen Lehrbüchern der Algebra und niedern Analysis, welche für den Schul- und Privat-Unterricht bestimmt sind, finden sich die in vorliegender Schrift bearbeiteten mathematischen Lehrgegenstände entweder gar nicht, oder nur theilweise und selten nach Theorie und Anwendung genügend abgehandelt. Da es dessen ungeachtet keinem Zweifel unterliegen kann, daß diese eben so wichtigen als interessanten Gegenstände sämmtlich in das Gebiet eines gründlichen und nur einigermaßen vollständigen Unterrichtes in der algebraischen Analysis gehören, so entschloß ich mich zur Herausgabe dieser Abhandlungen, und hoffe, sie werden nicht nur ein wesentliches Supplement zu vielen schätzbaren Lehrbüchern der Algebra und niedern Analysis abgeben, sondern auch für sich allein ein in manchen Kreisen willkommenes Werkchen bilden, das durch seine ausführliche und lichtvolle Darstellung, sowie durch seine Reichhaltigkeit an aufgelösten praktischen Beispielen vorzüglich auch das Selbststudium dieser an sich ziemlich schwierigen Materien erleichtern und möglichst angenehm machen wird.

Den fünf ersten Abhandlungen, welche mir angehören, dürfte es zur besondern Empfehlung gereichen, daß ich darin

viele der schwierigsten, dahin einschlagenden Aufgaben aus der allgemein geschätzten Sammlung algebraischer Aufgaben von **Meier Hirsch** aufgelöst habe, welche sogar in den ausschließlich für die Auflösung dieser Aufgaben bestimmten Werken von **J. Ph. Gruson** und **S. Sachs** zum Theile unaufgelöst geblieben sind.

Für die Gediegenheit der vier letzten Abhandlungen bürgen die Namen der in der mathematischen Welt rühmlichst bekannten Verfasser. Ich habe sie aus dem Französischen übersetzt und mit erläuternden und ergänzenden Noten begleitet, welche vom Texte abgesondert und mit kleiner Schrift gedruckt wurden.

Bei der Ausarbeitung dieses Buches zog ich folgende sehr empfehlungswerthe Werke zu Rathe:

Euler, Algebra mit Zusätzen von **Lagrange**.
Lefébure de Fourcy, *Leçons d'algèbre.*
Bourdon, *Élémens d'algèbre.*
Burg, Lehrbuch der höhern Mathematik.
Legendre, *Théorie des nombres.*
Lacroix, *Traité élémentaire du calcul des probabilités.*
Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités.*
Lacroix, *Traité complet de calcul différentiel et intégral.*

Stuttgart, im März 1844.

Professor **C. F. Ritter.**

Inhalts-Verzeichniß.

Erste Abhandlung.

Die Anwendung der quadratischen Gleichungen zum Bestimmen des Maximums und Minimums der Functionen.

Von L. F. Ritter.

§. 1 bis §. 13.

Seite

Abhängige und unabhängige Veränderliche. Explicite und implicite Functionen 1

Maximum und Minimum 3

Die Auflösung der Aufgaben über Maximum und Minimum mittelst der quadratischen Gleichungen 3

Verschiedene Beispiele über Maximum und Minimum nebst den Auflösungen 5

Die Lehre vom Trinom des zweiten Grades 9

Noch einige schwierige Beispiele über Maximum und Minimum nebst den Auflösungen 13

Zweite Abhandlung.

Die Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Von L. F. Ritter.

§. 14 bis §. 33.

Die Auflösung der Gleichung $A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$ in Rationalzahlen 16

Seite

Die Auflösung der Gleichung $A + Bx + Cy + Exy = 0$ in ganzen Zahlen 18

Die Auflösung der Gleichung $A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy = 0$ in ganzen Zahlen 19

Verschiedene Beispiele nebst den Auflösungen 20

Das Rationalmachen der Ausdrücke von den Formen $\sqrt{a + bx + cx^2}$, $\sqrt{ay^2 + bxy + cx^2}$, $\sqrt{(fx + g)(hx + k)}$, $\sqrt{(dx + e)^2 + (fx + g)(hx + k)}$ nebst aufgelösten Uebungsbeispielen.

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a + bx}$ rational machen 24

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{bx + cx^2}$ rational machen 24

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a + \gamma^2 x^2}$ rational machen 25

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{\alpha^2 + cx^2}$ rational machen 25

Werthe für x und y zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{ay^2 + \gamma^2 x^2}$ rational machen 26

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a + bx + \gamma^2 x^2}$ rational machen 27

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a^2 + bx + cx^2}$ rational machen 27

Werthe für x und y zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{ay^2 + bxy + \gamma^2 x^2}$ rational machen 28

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{(fx + g)(hx + k)}$ rational machen 29

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{(dx + e)^2 + (fx + g)(hx + k)}$ rational machen 30

Es sey $x = w$ ein Werth von x, welcher den Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational macht, wenn a, b und c beliebige Rationalzahlen bezeichnen; andere Werthe für x zu finden, welche dieselbe Eigenschaft besitzen 31

Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational machen, wenn a, b und c beliebige Rationalzahlen bezeichnen 33

Historische Notizen über die unbestimmte Analytik und die damit enge zusammenhängende Theorie der Zahlen 36

Dritte Abhandlung.

Die combinatorischen Grundoperationen.

Von **L. F. Ritter.**

§. 34 bis §. 49.

Seite

Syntaktik oder Combinationslehre 39

Permutationen.

Die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen für n verschiedene Elemente zu finden 40

Die Anzahl der Permutationsformen für n Elemente zu finden, wenn die Elemente nicht durchaus verschieden sind, sondern

a) ein Element m mal vorkommt 41

b) ein Element m mal, ein zweites p mal und ein drittes q mal vorkommt 42

Das allgemeine Gesetz für die vollständige Bildung aller Permutationsformen gegebener Elemente 43

Combinationen.

Die Anzahl der Combinationsformen ohne Wiederholungen für n Elemente zur mten Classe zu finden 44

Die Anzahl der Combinationsformen mit Wiederholungen für n Elemente zur mten Classe zu finden 45

Das allgemeine Gesetz für die vollständige Bildung aller Combinationsformen gegebener Elemente 47

Variationen.

Die Anzahl der Variationsformen ohne Wiederholungen für n Elemente zur mten Classe zu finden 48

Die Anzahl der Variationsformen mit Wiederholungen für n Elemente zur mten Classe zu finden 48

Das allgemeine Gesetz für die vollständige Bildung aller Variationsformen gegebener Elemente 49

Note über bedingte und unbedingte Combinationen und Variationen . 50

Note über die Anwendung der Combinationslehre 50

Angewandte Aufgaben nebst den Auflösungen.

a) Ueber Permutationen 51

b) Ueber Combinationen 53

c) Ueber Variationen 56

Vierte Abhandlung.

Die Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Von **L. F. Ritter.**

§. 50 bis §. 71.

Einfache oder absolute Wahrscheinlichkeit 58

Entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit 60

Seite

Note über den Sinn der Wahrscheinlichkeits-Rechnung 61
Relative Wahrscheinlichkeit 62
Zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit 64
Angewandte Aufgaben über die einfache oder absolute Wahrscheinlichkeit nebst den Auflösungen 66
Note über das richtige Verhältniß zwischen dem Einsatze und dem Gewinne der Spielenden 75
Note über die Verluste der Spieler bei den Hasardspielen überhaupt, sowie insbesondere bei der französischen Zahlenlotterie 75
Angewandte Aufgaben über die relative Wahrscheinlichkeit, sowie über die zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit nebst den Auflösungen 82
Wiederholte Versuche 91
Note über die Entwicklung des allgemeinen Gliedes der Polynomialformel
$(\alpha+\beta+\gamma+\delta\ldots)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n + \ldots + \delta^n + \ldots$ 95
Note über die verschiedene Betrachtung und Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses 97
Angewandte Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Versuchen nebst den Auflösungen 98
Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeits-Rechnung 104

Fünfte Abhandlung.

Die höheren arithmetischen und geometrischen Reihen.

Von L. F. Ritter.

§. 72 bis §. 86.

Begriff der höheren arithmetischen und geometrischen Reihen . . . 108
Note über die arithmetischen Progressionen 108
Note über die geometrischen Progressionen 112
Reihen gleich hoher Potenzen, welche auf die Glieder einer arithmetischen Progression gebaut sind 110
Arithmetische Summenreihen 120
Figurirte Zahlenreihen 121
Geometrische Summenreihen 127
Reihen gleich hoher Potenzen, welche auf die Glieder einer geometrischen Progression gebaut sind 129
Reihen, welche durch die gliederweise Multiplication einer arithmetischen Progression in eine geometrische Progression entstehen . . 130
Reihen, welche durch die gliederweise Multiplication einer Reihe Polygonalzahlen in eine geometrische Progression entstehen 131

Seite
Reihen, welche durch die gliederweise Multiplication einer Reihe Pyramidalzahlen in eine geometrische Progression entstehen 133
Angewandte Aufgaben über verschiedene höhere arithmetische Reihen . 136

Sechste Abhandlung.

Trigonometrische Formeln und Reihen, welche in der höhern Mathematik eine große Anwendung finden.

Von Lefébure de Fourcy.

§. 87 bis §. 95.

Die Formel von Moivre für den Fall, daß der Exponent eine ganze positive Zahl ist 141
Die Formel von Moivre für den Fall, daß der Exponent eine gebrochene positive Zahl ist 142
Die Formel von Moivre für den Fall, daß der Exponent eine beliebige negative Zahl ist 142
Vollständige Discussion der Moivre'schen Formel 143
Note über den Satz: Ist eine Gleichung aus reellen und imaginären Gliedern zusammengesetzt, so müssen sowohl die reellen, als auch die imaginären Theile derselben einander einzeln gleich seyn . . . 144
Formeln für die Entwicklung von *sin* $n\varphi$ und *cos* $n\varphi$ 147
Formeln für die Entwicklung von $(sin\ x)^n$ und $(cos\ x)^n$ 149
Die Entwicklung des *Sinus* und *Cosinus* in Reihen 152
Vollständige Discussion dieser Reihen 153
Note über die cyklischen Functionen 156
Note über die Entwicklung des Bogens als Function der Tangente . 157
Leibnitz'sche Reihe. Lagny's, Euler's, Machin's Berechnung der Kreislinie.
Note über die Entwicklung der Exponentialreihen 159
Note über die Entwicklung der logarithmischen Reihen 161

Siebente Abhandlung.

Die trigonometrische Auflösung der binomischen Gleichungen von jedem Grade.

Von Lefébure de Fourcy.

§. 96 bis §. 98.

Einleitende Note über die algebraische Auflösung der binomischen Gleichungen 166
Die Gleichung $x^m - A = 0$ hat m verschiedene Wurzeln und die $\sqrt[m]{A}$ m verschiedene Werthe 166

Seite

Von der Auflösung der Gleichung $x^{pqr} - A = 0$ 167

Um die sämmtlichen Werthe der $\sqrt[m]{A}$ zu erhalten, darf man nur irgend einen derselben mit den sämmtlichen Werthen der $\sqrt[m]{1}$ multipliciren 167

Die Auflösungen der Gleichungen

$y^2 - 1 = 0$, $y^2 + 1 = 0$, $y^3 - 1 = 0$, $y^3 + 1 = 0$ 168

$y^4 - 1 = 0$, $y^4 + 1 = 0$, $y^5 - 1 = 0$ 169

$y^7 - 1 = 0$ 170

$y^9 - 1 = 0$ 171

$y^5 + 1 = 0$, $y^7 + 1 = 0$, $y^9 + 1 = 0$, $y^6 - 1 = 0$, $y^8 - 1 = 0$, $y^{10} - 1 = 0$, $y^6 + 1 = 0$, $y^8 + 1 = 0$, $y^{10} + 1 = 0$ 172

Bemerkung über die Auflösung der binomischen Gleichungen von noch höheren Graden 173

Bei jeder Wurzel aus 1 können die sämmtlichen Wurzeln durchs Potenziren einer imaginären Wurzel hervorgebracht werden . 174

Die trigonometrische Auflösung der binomischen Gleichungen . . . 166

Die trigonometrische Auflösung der Gleichungen von der Form $x^n = +1$ 167

Aufgelöste Uebungs-Beispiele 176

Die trigonometrische Auflösung der Gleichungen von der Form $x^n = -1$ 178

Aufgelöste Uebungs-Beispiele 179

Die Bildung der reellen Divisoren vom zweiten Grade der Binome $x^n - 1$ und $x^n + 1$ 181

Der Lehrsatz von Côtes 182

Achte Abhandlung.

Die trigonometrische Auflösung der allgemeinen Gleichungen des dritten Grades.

Von **Lefébure de Fourcy.**

§. 99 bis §. 105.

Einleitende Note über die algebraische Auflösung der cubischen Gleichungen 185

Die allgemeine Auflösung der Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$ mittelst der reducirten Gleichung $z^2 + 2qz - p^3 = 0$ . . 185

Die Erörterung der Cardanischen Formel

$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$ . . . 186

Seite
Die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$ 187
Die Discussion dieser Wurzeln 188
Kennt man eine reelle Wurzel der Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$, so findet man leicht die beiden andern Wurzeln 190
Erste trigonometrische Auflösungs-Methode der cubischen Gleichungen 185
Die trigonometrische Auflösung der Gleichungen von der Form $x^3 - 3px + 2q = 0$, wenn sie dem irreductibeln Falle angehören 191
Die trigonometrische Auflösung der Gleichungen von der Form $x^3 - 3px + 2q = 0$, wenn sie dem irreductibeln Falle nicht angehören 194
Die trigonometrische Auflösung der Gleichungen von der Form $x^3 + 3px + 2q = 0$ 197
Zweite trigonometrische Auflösungs-Methode der cubischen Gleichungen 198
Note über die Herleitung der Gleichung
$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}\cos\varphi = 0$ 199
Note über die Auflösung der Gleichung
$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}\cos\varphi = 0$ 200
Aufgelöste Beispiele über die trigonometrische und algebraische Auflösung der cubischen Gleichungen jeder Art 205
Die Reduction der Ausdrücke von der Form $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ 210
Erste Reductions-Methode nebst aufgelösten Uebungsbeispielen . 210
Zweite Reductions-Methode nebst aufgelösten Uebungsbeispielen . 214

Neunte Abhandlung.

Die Berechnung des Fehlers, welcher aus der Anwendung der Proportion entspringt, die der Gebrauch der Logarithmentafeln vorschreibt.

Von **M. Vincent.**

§. 106 bis §. 112.

Sind $n + 1$ und n zwei auf einander folgende ganze Zahlen, so nimmt die Differenz ihrer Logarithmen in dem Maße ab, in welchem n zunimmt, und ist stets $< \frac{1}{2n}$ 216
Zwei auf einander folgende logarithmische Differenzen, wie $l(n+1) - ln$ und $l(n+2) - l(n+1)$, können als gleich angesehen werden, wenn $n > 10000$ 218
Bei sehr großen Zahlen, welche höchstens um 1 von einander differiren, sind die Differenzen der Logarithmen den Differenzen der Zahlen proportional 219

Seite

Die Berechnung des Fehlers, welcher aus der Ungenauigkeit der Proportion (oder der in den Logarithmentafeln enthaltenen Proportionaltheile) entspringt 221

Die Berechnung des Fehlers, welcher aus der Ungenauigkeit der in den Tafeln enthaltenen Logarithmen entspringt 224

Sowohl beim Bestimmen des zu einer gegebenen Zahl gehörigen Logarithmen, als auch beim Bestimmen der einem gegebenen Logarithmen entsprechenden Zahl braucht man bloß die Ungenauigkeit der in den Tafeln enthaltenen Logarithmen zu berücksichtigen 229

Die Anwendung der vorhergehenden Theorie auf die Logarithmentafeln von Callet 229

Erste Abhandlung.

Die Anwendung der quadratischen Gleichungen zum Bestimmen des Maximums und Minimums der Functionen.

Abhängige und unabhängige Veränderliche. Explicite und implicite Functionen.

§. 1.

Substituiren wir in der Gleichung $y = ax^2$ für x verschiedene Werthe, so nimmt auch y verschiedene Werthe an. Z. B. für $x = 0$ wird $y = 0$, für $x = 1$ wird $y = a$, für $x = 2$ wird $y = 4a$, für $x = 3$ wird $y = 9a$, 2c.

Betrachten wir also in der Gleichung $y = ax^2$ x als eine veränderliche Größe, d. h. als eine Größe, der successive verschiedene Werthe beigelegt werden sollen, so erscheint y als eine neue veränderliche Größe, nur mit dem wesentlichen Unterschiede, daß x jeden beliebigen Werth annehmen kann, indeß sich die verschiedenen Werthe von y nach den entsprechenden Werthen von x richten. Man nennt daher in vorstehender, wie in jeder andern Gleichung, welche eine ähnliche Relation zwischen den veränderlichen Größen x und y ausdrückt, x die unabhängige veränderliche Größe, oder schlichtweg die Veränderliche oder Variable, und y die abhängige veränderliche Größe oder die Function von x, und pflegt diese zwischen den veränderlichen Größen x und y bestehende Relation auf eine allgemeine Weise durch die Gleichung $y = f(x)$ auszudrücken. Eine Größe, wie a in der obigen Gleichung, welche mit der Veränderlichen x, oder y verbunden vorkommt

und stets denselben Werth beibehält, heißt eine constante Größe oder schlichtweg eine Constante.

Weitere Beispiele der Gleichung $y = f(x)$ sind $y = \frac{a\sqrt{x}}{b}$, $y = \frac{ax^2}{c}$.

§. 2.

Befindet sich in einer Gleichung, wie dieß in den vorhergehenden Beispielen der Fall war, die Function y auf der einen Seite und die Veränderliche x auf der andern Seite des Gleichheitszeichens, so heißt y eine entwickelte oder explicite Function von x. Die Gleichung $y = f(x)$ drückt somit auf eine allgemeine Weise jede explicite Function y einer Veränderlichen x aus.

Annulliren wir die Gleichungen

$$1)\ y = ax^2,\ 2)\ y = \frac{a\sqrt{x}}{b},\ 3)\ y = \frac{ax^n}{c},$$

so verwandeln sie sich in

$$1)\ y - ax^2 = 0,\ 2)\ by - a\sqrt{x} = 0,\ 3)\ cy - ax^n = 0,$$

Gleichungen, in welchen die Function y und die Veränderliche x auf einer und derselben Seite des Gleichheitszeichens mit einander verbunden vorkommen. Unter dieser Form heißt alsdann y eine unentwickelte oder implicite Function von x, und die in diesem Falle zwischen den Veränderlichen x und y bestehende Relation wird auf eine allgemeine Weise durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ ausgedrückt.

§. 3.

Wie sich jede explicite Function y einer Veränderlichen x durch die Annullirung der Gleichung $y = f(x)$ in eine implicite Function, d. h. in einen Ausdruck von der Form $f(x, y) = 0$ umändern läßt, so kann auch umgekehrt eine implicite Function y der Veränderlichen x durch die Auflösung der Gleichung $f(x, y) = 0$ in eine explicite Function, d. h. in einen Ausdruck von der Form $y = f(x)$, umgewandelt werden.

Weitere Beispiele der Gleichung $f(x, y) = 0$ sind

1) $ay + bxy - c = 0$ oder $ay + bxy = c$,

2) $y^2 - 2axy - b = 0$ oder $y^2 - 2axy = b$,

3) $b\sqrt{y - x} - a\sqrt{y - c} = 0$ oder $b\sqrt{y - x} = a\sqrt{y - c}$.

Löst man die vorangehenden Gleichungen auf, so verwandeln sich diese implicite Functionen in folgende explicite Functionen:

$$1)\ y = \frac{c}{a + bx},$$
$$2)\ y = ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b},$$
$$3)\ y = \frac{b^2x - a^2c}{b^2 - a^2}.$$

Maximum und Minimum.

§. 4.

Kann eine Function für jede Zu- oder Abnahme ihrer Veränderlichen eine gewisse Größe nicht überschreiten, so heißt diese Größe das Maximum der Function, und kann eine Function für jede Zu- oder Abnahme ihrer Veränderlichen nicht kleiner werden, als eine gewisse Größe, so heißt diese Größe das Minimum der Function. Eine Function, welche von 0 bis ∞ wachsen kann, hat demnach weder Maximum, noch Minimum.

Beispiel 1. Substituirt man in $y = b - (a - x)^2$ successive $x = 0$, $x = a$, $x = a + d$, $x = a - d$, wo d jede beliebige Größe vertreten kann, so erkennt man $y = b$ für das Maximum der Function y.

Beispiel 2. Substituirt man in $y = b + (a - x)^2$ successive $x = 0$, $x = a$, $x = a + d$, $x = a - d$, wo d jede beliebige Größe vertreten kann, so erkennt man $y = b$ für das Minimum der Function y.

Beispiel 3. In $y = x^2$ erkennt man leicht, daß y mit x von 0 bis ∞ wachsen kann, und also weder Maximum noch Minimum hat.

Die Auflösung der Aufgaben über Maximum und Minimum mittelst der quadratischen Gleichungen.

§. 5.

Lösen wir die Gleichung $y = b - (a - x)^2$ in Bezug auf x auf, so erhalten wir $x = a \mp \sqrt{b - y}$.

Soll nun x reell bleiben, so kann y unter dem Wurzelzeichen von 0 bis b wachsen, und wir erkennen somit unter dieser Form $y = b$ für das Maximum der Function y, wie §. 4, Beispiel 1.

Lösen wir die Gleichung $y = b + (a - x)^2$ in Bezug auf x auf, so erhalten wir $x = a \mp \sqrt{y - b}$.

Soll nun x reell bleiben, so kann y unter dem Wurzelzeichen bis ins Unendliche wachsen und bis b abnehmen; wir erkennen somit unter dieser Form $y = b$ für das Minimum der Function y, wie §. 4, Beispiel 2.

Lösen wir die Gleichung $y = x^2$ in Bezug auf x auf, so erhalten wir $x = \pm \sqrt{y}$. Hier kann y unter dem Wurzelzeichen von 0 bis ∞ wachsen, ohne daß x aufhört, reell zu bleiben; wir erkennen somit unter dieser Form, daß die Function y weder Maximum, noch Minimum hat, wie §. 4, Beispiel 3.

Das Maximum, oder Minimum einer Function $y = f(x)$, welche in Bezug auf x quadratisch ist, kann also auch vermittelst der Auflösung dieser Gleichung bestimmt werden.

§. 6.

Es mag y eine explicite, oder implicite Function von x seyn, wenn die Gleichung, welche die Relation zwischen y und x ausdrückt, in Bezug auf x quadratisch ist, so erhält man durch ihre Auflösung für x einen Werth von der allgemeinen Form

$$x = A \pm B \sqrt{C - D},$$

wo alsdann y jedenfalls unter dem Wurzelzeichen vorkommt, und entweder bloß in C, oder bloß in D, oder in beiden zugleich enthalten ist.

1) Angenommen, y sey in C allein enthalten.

In diesem Falle ist D constant, und C kann bis ins Unendliche wachsen und abnehmen, bis $C = D$ oder $C - D = 0$ wird, damit x reell bleibe. Der Werth von y, für welchen $C - D = 0$ wird, ist alsdann das Minimum von y, wenn C mit y abnimmt, und das Maximum von y, wenn C abnimmt, indeß y wächst.

2) Angenommen, y sey in D allein enthalten.

In diesem Falle ist C constant, und D kann von 0 an wachsen, bis $D = C$ oder $C - D = 0$ wird, damit x reell bleibe. Der Werth von y, für welchen $C - D = 0$ wird, ist das Maximum von y, wenn D mit y wächst und das Minimum von y, wenn D wächst, indeß y abnimmt.

3) Angenommen, y sey in C und D zugleich enthalten.

In diesem Falle kann $C - D$ von 0 bis ∞ wachsen, damit

x reell bleibe. Der Werth von y, für welchen $C - D = 0$ wird, ist das Maximum von y, wenn y wächst, indeß $C - D$ abnimmt und das Minimum von y, wenn y mit $C - D$ abnimmt.

Soll daher das Maximum, oder Minimum einer expliciten, oder impliciten Function von x gesucht werden, welche in einer Gleichung enthalten ist, die in Bezug auf x quadratisch ist, so löse man die Gleichung in Bezug auf x auf, beurtheile hierauf an der Form der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe, ob die Function von x ein Maximum, oder Minimum habe, und bestimme endlich dessen Werth aus dem annullirten Radicanden.

Verschiedene Beispiele über Maximum und Minimum nebst den Auflösungen.

§. 7.

Aufgabe 1. Das Maximum, oder Minimum der Function $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$ zu bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$ erhält man $x = 1 + y \pm \sqrt{y^2 - 1}$.

Soll nun x und somit auch der Ausdruck $\sqrt{y^2 - 1}$ reell bleiben, so kann y nicht kleiner als 1 werden, wohl aber von 1 an bis in Unendliche wachsen. Die gegebene Function hat also kein Maximum, sondern $y = 1$ zum Minimum, welchem $x = 1 + y = 1 + 1 = 2$ entspricht.

Aufgabe 2. Das Maximum, oder Minimum der Function $y = \frac{m^2x^2 + n^2}{(m^2 - n^2)x}$ zu bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung $y = \frac{m^2x^2 + n^2}{(m^2 - n^2)x}$ erhält man $x = \frac{(m^2 - n^2)\,y \pm \sqrt{(m^2 - n^2)^2y^2 - 4m^2n^2}}{2m^2}$.

Da nun x und somit auch der Ausdruck $\sqrt{(m^2 - n^2)^2y^2 - 4m^2n^2}$ reell bleiben soll, so kann y nicht kleiner werden, als diejenige Größe, welche, wenn sie für y im Radicanden substituirt wird, $(m^2 - n^2)^2y^2 = 4m^2n^2$ macht, wohl aber von dieser Größe an ins Unendliche

wachsen. Es hat also die gegebene Function kein Maximum, sondern ein Minimum.

Setzt man hierauf $(m^2 - n^2)^2 y^2 - 4m^2 n^2 = 0$ oder $(m^2 - n^2)^2 y^2 = 4m^2 n^2$, so erhält man hieraus $y = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$ für das Minimum der gegebenen Function, welchem $x = \frac{(m^2 - n^2)y}{2m^2}$ $= \frac{m^2 - n^2}{2m^2} \times \frac{2mn}{m^2 - n^2} = \frac{n}{m}$ entspricht.

Aufgabe 3. Das Maximum, oder Minimum der Function $y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{6(2x + 1)}$ zu bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung $y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{6(2x + 1)}$ verschafft $x = \frac{3y - 1 \pm \sqrt{9y^2 + 4}}{2}$.

Da nun der Ausdruck $\sqrt{9y^2 + 4}$ und somit auch x bei jedem Werthe von y reell bleibt, so hat die gegebene Function weder Maximum, noch Minimum.

Aufgabe 4. Die Zahl 2a in zwei solche Theile zu theilen, daß deren Product die größt mögliche Zahl gebe.

Auflösung. Setzt man den einen Theil = x, so ist der andere Theil = 2a — x, und das Product der beiden Theile $y = (2a - x)x$, woraus $x = a \pm \sqrt{a^2 - y}$.

Soll nun x und somit auch der Ausdruck $\sqrt{a^2 - y}$ reell bleiben, so kann y nicht größer als a^2 werden, wohl aber bis 0 abnehmen. Das Maximum des verlangten Productes ist also $y = a^2$, welchem die beiden Theile $x = a$ und $2a - x = 2a - a = a$ entsprechen; es muß daher die gegebene Zahl in zwei gleiche Theile zerlegt werden.

Aufgabe 5. Die kleinste Summe zu bestimmen, welche entsteht, wenn man a in zwei Theile theilt, diese quadrirt und die Quadrate addirt.

Auflösung. Setzt man den einen Theil = x, so ist der andere Theil = a — x, und das Minimum der Function $y = x^2 + (a - x)^2$ zu bestimmen. Aus $y = x^2 + (a - x)^2$ ist aber $x = \frac{a \pm \sqrt{2y - a^2}}{2}$.

Soll nun x und somit auch der Ausdruck $\sqrt{2y - a^2}$ reell

bleiben, so kann y nicht kleiner werden, als diejenige Größe, welche, wenn sie für y im Radicanden substituirt wird, $2y = a^2$ macht, wohl aber von dieser Größe an bis ins Unendliche wachsen. Es hat also die gegebene Function kein Maximum, sondern ein Minimum.

Setzt man hierauf $2y - a^2 = 0$ oder $2y = a^2$, so erhält man hieraus $y = \frac{a^2}{2}$ für das Minimum der verlangten Summe, welchem die beiden Theile $x = \frac{a}{2}$ und $a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ entsprechen.

Aufgabe 6. Unter allen gleichschenkligen Dreiecken, deren gleiche Seiten $= a$ gegeben sind, dasjenige zu bestimmen, welches die größte Fläche hat.

Auflösung. Denken wir uns von der Spitze des gesuchten Dreiecks (wo die zwei gleichen Seiten zusammenlaufen) ein Perpendikel auf die Gegenseite (die Basis des Dreiecks) gefällt, so trifft dieses in die Mitte derselben. Setzen wir hierauf die Höhe des Dreiecks (das gefällte Perpendikel) $= x$, so ist bekanntlich die halbe Basis $= \sqrt{a^2 - x^2}$, und der Inhalt des Dreiecks $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, woraus das Maximum $y = \frac{a^2}{2}$, welchem die Höhe $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und die Basis $= a\sqrt{2}$ entsprechen. Das gesuchte gleichschenklige Dreieck ist daher rechtwinklig an der Spitze und seine Basis noch einmal so groß als seine Höhe.

Aufgabe 7. Es sey der Umfang eines Dreiecks $= a$ und eine Seite desselben $= b$ gegeben. Wie groß müssen die beiden andern Seiten des Dreiecks seyn, damit dasselbe den größt möglichen Inhalt habe?

Auflösung. Bezeichnen α, β und γ die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks, und wird $s = \alpha + \beta + \gamma$ gesetzt, so ist bekanntlich der Inhalt dieses Dreiecks $= \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} - \alpha\right)\left(\frac{s}{2} - \beta\right)\left(\frac{s}{2} - \gamma\right)}$.
Setzen wir daher die erste Seite des gesuchten Dreiecks $= b$, die zweite $= x$ und diesem gemäß die dritte $= a - b - x$, so ist der Inhalt dieses Dreiecks $y = \frac{1}{4}\sqrt{a(a-2b)(a-2x)(2x+2b-a)}$, woraus das Maximum $y = \frac{b}{4}\sqrt{a^2 - 2ab}$, welchem die Seite $x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ und die Seite $a - b - x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ entsprechen.

Unter allen Dreiecken über einer gegebenen Basis hat daher das gleichschenklige den größten Inhalt.

Aufgabe 8. Es sind zwei Seiten eines Dreiecks, die eine $= a$ und die andere $= b$ gegeben. Wie groß muß die dritte Seite seyn, damit das Dreieck den größt möglichen Inhalt habe?

Auflösung. Setzen wir die dritte Seite $= x$, so ist (nach der in der vorhergehenden Auflösung angeführten Formel) der Inhalt des Dreiecks $y = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2 - a^4 - b^4 - x^4}$, woraus das Maximum $y = \frac{ab}{2}$, welchem die Seite $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ entspricht. Unter allen Dreiecken, für welche zwei Seiten gegeben sind, hat daher das rechtwinklige den größten Inhalt.

Aufgabe 9. Das größte Parallelogramm zu bestimmen, welches in ein gegebenes Dreieck, dessen Höhe $= h$ und dessen Basis $= b$, einbeschrieben werden kann.

Auflösung. Setzt man die Höhe des einbeschriebenen Parallelogrammes $= x$, so findet man durch die Proportion

$$\text{Basis} : h - x = b : h$$

$$\text{seine Basis} = \frac{b\,(h - x)}{h},$$

$$\text{hierauf seinen Inhalt } y = \frac{b\,(h - x)}{h} \cdot x,$$

woraus das Maximum $y = \frac{bh}{4}$, welchem die Höhe $x = \frac{h}{2}$ und die Basis $\frac{b\,(h - x)}{h} = \frac{b}{2}$ entsprechen.

Aufgabe 10. Unter allen Rechtecken von gleichem Inhalte dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Auflösung. Setzt man den Inhalt des gesuchten Rechtecks $= a^2$, seine Basis $= x$, so ist seine Höhe $= \frac{a^2}{x}$, und man findet sofort leicht, daß das gesuchte Rechteck ein Quadrat ist.

Aufgabe 11. Ein Rechteck zu finden, das bei gegebenem Inhalte $= a$ den kleinsten Umfang hat, wenn die obere Seite nicht dazu gerechnet wird.

Auflösung. Setzt man die Basis des gesuchten Rechtecks $= x$, so ist seine Höhe $= \frac{a}{x}$, und man findet sofort leicht den

Umfang des gesuchten Rechtecks $= 2\sqrt{2a}$, seine Basis $= \sqrt{2a}$ und seine Höhe $= \frac{1}{2}\sqrt{2a}$.

Aufgabe 12. Unter allen Rechtecken, welche sich in einen Quadranten zeichnen lassen (so, daß eine Seite desselben in den Halbmesser des Kreises fällt), dasjenige zu finden, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Setzt man den Halbmesser des Kreises $= r$, die Basis des gesuchten Rechtecks $= x$ und diesem gemäß seine Höhe $= \sqrt{r^2 - x^2}$, so erhält man leicht den Inhalt des gesuchten Rechtecks $= \frac{r^2}{2}$, seine Basis $= \frac{r}{2}\sqrt{2}$ und seine Höhe $= \frac{r}{2}\sqrt{2}$. Das gesuchte Rechteck ist also ein Quadrat.

Anmerkung. Was in den vorhergehenden Aufgaben das Bestimmen des Maximums und Minimums der Functionen sehr erleichterte, war ihre einfache Form. Sie kamen nämlich unter dem Wurzelzeichen bloß auf der ersten oder bloß auf der zweiten Potenz mit Constanten in Verbindung vor. Führt aber das Bestimmen des Maximums oder Minimums einer gegebenen Function auf einen Radicanden, welcher nicht nur die erste, sondern auch die zweite Potenz der Function enthält, so erfordert dasselbe eine genaue Bekanntschaft mit dem Trinom des zweiten Grades, von dessen Eigenschaften wir nun sprechen wollen *.

Die Lehre vom Trinom des zweiten Grades.

§. 8.

Ein Ausdruck von der Form $my^2 + ny + p$ heißt in Bezug auf y ein Trinom des zweiten Grades. Nun handelt es sich darum, auszumitteln, welchen Werth das Trinom erhalte, wenn man darin für y irgend eine bestimmte Größe substituirt.

---

* Wenn man auch in einzelnen hieher gehörigen Fällen die Kenntniß des Trinoms vom zweiten Grade durch die Einführung einer, oder mehrerer Hilfsgrößen entbehrlich machen kann, so ziehen wir es doch vor, die Regeln dieses Trinoms zum Bestimmen des Maximums und Minimums anzuwenden: einerseits, weil sie eine allgemeine Behandlung der hieher gehörigen Aufgaben über Maximum und Minimum zulassen, und andererseits, weil die Einführung solcher Hilfsgrößen nicht Jedermann zu Gebote steht, sondern geübte und gewandte Rechner voraussetzt.

Um dahin zu gelangen, setzen wir $my^2 + ny + p = 0$, woraus $y = -\frac{n}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{n^2 - 4mp}$. Ist hier $n^2 - 4mp >, =,$ oder < 0, so hat y respective zwei reelle ungleiche, oder zwei reelle gleiche, oder zwei ungleiche imaginäre Werthe. In allen drei Fällen aber wird bekanntlich $my^2 + ny + p = 0$, wenn man für y die beiden Wurzeln der Gleichung $my^2 + ny + p = 0$ substituirt, indeß jede andere für y substituirte reelle Größe ein anderes Resultat erzielt, das bald positiv, bald negativ seyn kann. Was für ein Vorzeichen das Resultat erhalte, läßt sich jederzeit leicht bestimmen, sobald man die Wurzeln der Gleichung $my^2 + ny + p = 0$ kennt, wie aus folgenden Regeln erhellen wird.

§. 9.

Erste Regel. a) Sind die beiden Wurzeln der Gleichung $my^2 + ny + p = 0$ reell und ungleich, so gibt jede für y im Trinom $my^2 + ny + p$ substituirte reelle Größe, welche innerhalb der beiden Werthe von y fällt, diesem Trinom einen Werth, der mit dem Coefficienten m ein entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Beweis. Gesetzt, man finde durch die Auflösung der Gleichung $y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m} = 0$ die beiden Wurzeln $y = y'$ und $y = y''$, so ist $my^2 + ny + p = m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right) = m(y - y')(y - y'')$, welche Werthe man auch für y in den beiden Theilen der Gleichung setzen mag. Ist nun α eine zwischen y' und y'' fallende Größe, also $\alpha <> y'$ und zugleich $\alpha >< y''$, so kann $(\alpha - y').(\alpha - y'')$ nur ein negatives Resultat geben; da $\alpha - y' > 0$, wenn $\alpha - y'' < 0$, oder $\alpha - y' < 0$, wenn $\alpha - y'' > 0$, und es hat daher $m(\alpha - y').(\alpha - y'')$ stets ein andres Vorzeichen als m. Da nun das Trinom $m\alpha^2 + n\alpha + p = m(\alpha - y').(\alpha - y'')$, so ist der Werth dieses Trinoms positiv, wenn m negativ und negativ, wenn m positiv ist, was zu beweisen war.

§. 10.

b) Sind die beiden Wurzeln der Gleichung $my^2 + ny + p = 0$ reell und ungleich, so gibt jede für y im Trinom $my^2 + ny + p$ substituirte reelle Größe,

welche außerhalb der Werthe von y fällt, diesem Trinom einen Werth, der mit dem Coefficienten m ein gleiches Vorzeichen hat, d. h. positiv oder negativ ist, je nachdem m positiv, oder negativ ist.

Beweis. Angenommen, man habe aus der Gleichung $y^2 + \frac{n}{m} y + \frac{p}{m} = 0$ die beiden Wurzeln $y = y'$ und $y = y''$ gefunden, so daß also $my^2 + ny + p = m \left(y^2 + \frac{n}{m} y + \frac{p}{m}\right) = m (y - y').(y - y'')$. Ist nun $\alpha >< y'$ und zugleich $\alpha >< y''$, so hat $\alpha - y'$ mit $\alpha - y''$ stets gleiches Vorzeichen, und es ist daher $m (\alpha - y').(\alpha - y'')$, oder der Werth des Trinoms $m\alpha^2 + n\alpha + p$ mit m stets positiv, oder negativ.

Beispiel 1. Setzt man das Trinom $9\frac{1}{3} y^2 - 90\frac{1}{3} y + 195 = 0$, so finden sich die beiden Wurzeln $y = 6\frac{3}{7}$ und $y = 3\frac{1}{4}$. Da nun z. B. 4 und 6 zwei Zahlen sind, welche zwischen $3\frac{1}{4}$ und $6\frac{3}{7}$ fallen, so muß das Trinom $9\frac{1}{3} y^2 - 90\frac{1}{3} y + 195$ einen negativen Werth erhalten, wenn man diese beiden Zahlen für y substituirt, weil der Coefficient von y^2, nämlich $9\frac{1}{3}$, positiv ist. Für $y = 4$ wird auch wirklich das Trinom $= - 17$, und für $y = 6$ das Trinom $= - 11$.

Substituirt man aber für y Zahlen, welche außerhalb $3\frac{1}{4}$ und $6\frac{3}{7}$ fallen, z. B. 7 und 3, so erhält man der Regel gemäß für $y = 7$ das Trinom $= 20$, und für $y = 3$ das Trinom $= 8$.

Beispiel 2. Setzt man das Trinom $-3y^2 + 2y + 65 = 0$, so finden sich die beiden Wurzeln $y = 5$ und $y = - 4\frac{1}{3}$.

Substituirt man daher für y im Trinom $- 3y^2 + 2y + 65$ Werthe, welche innerhalb 5 und $- 4\frac{1}{3}$ fallen, z. B. 4 und $- 4$, so erhält man der Regel gemäß für $y = 4$ das Trinom $= 25$, und für $y = - 4$ das Trinom $= 9$. Substituirt man aber $y = 6$ und $y = - 6$, also zwei Zahlen, welche außerhalb 5 und $- 4\frac{1}{3}$ fallen, so erhält man der Regel gemäß für $y = 6$ das Trinom $= - 31$, und für $y = - 6$ das Trinom $= - 55$.

§. 11.

Zweite Regel. Sind die Wurzeln der Gleichung $my^2 + ny + p = 0$ reell und gleich, so gibt jede für y im Trinom $my^2 + ny + p$ substituirte reelle

Größe, welche von dem für y gefundenen Werthe differirt, dem Trinom einen Werth, der mit dem Coefficienten m gleiches Vorzeichen hat.

Beweis. Da die beiden Werthe von y einander gleich sind, so ist (nach §. 7) $n^2 - 4mp = 0$, woraus $p = \frac{n^2}{4m}$ und also

$$my^2 + ny + p = my^2 + ny + \frac{n^2}{4m} = m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{n^2}{4m^2}\right)$$

$= m\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$. Es ist aber der Ausdruck $\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$ stets positiv, welche Größe man auch für y substituiren mag, die jedoch ausgenommen, welche den Ausdruck $\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$ auf 0 führt, oder der Gleichung $my^2 + ny + p = 0$ als Wurzel entspricht, nämlich $y = -\frac{n}{2m}$. Also hat auch $m\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$ oder der Werth des Trinoms $my^2 + ny + p$ stets gleiches Vorzeichen mit dem Coefficienten m, welche andere reelle Größe man auch für y setzen mag.

Beispiel. Setzt man das Trinom $y^2 - 10y + 25 = 0$, so erhält man die beiden Werthe von $y = 5$. Substituirt man daher im Trinom $y^2 - 10y + 25$ für y beliebige reelle Werthe außer 5, z. B. 10 und -10, so erhält man der Regel gemäß für $y = 10$ das Trinom $= 25$, und für $y = -10$ das Trinom $= 225$.

§. 12.

Dritte Regel. Sind die beiden Wurzeln der Gleichung $my^2 + ny + p = 0$ imaginär, so gibt jede reelle Größe, welche man für y im Trinom $my^2 + ny + p$ substituirt, diesem Trinom einen Werth, der mit dem Coefficienten m gleiches Vorzeichen hat.

Beweis. Da die beiden Wurzeln der Gleichung $my^2 + ny + p = 0$ imaginär sind, so hat man (nach §. 7) $n^2 - 4mp < 0$, woraus $\frac{p}{m} > \frac{n^2}{4m^2}$. Setzen wir nun $\frac{p}{m} = \frac{n^2}{4m^2} + \beta^2$, wo β irgend eine Zahlengröße ausdrückt, so folgt, daß $my^2 + ny + p$

$$= m\left[y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right] = m\left[y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{n^2}{4m^2} + \beta^2\right]$$

$= m\left[\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2 + \beta^2\right]$, eine Größe, welche offenbar bei jedem reellen Werthe von y mit m gleiches Vorzeichen hat.

Beispiel. Setzt man das Trinom $3y^2 - 6y + 30 = 0$, so erhält man die beiden Wurzeln $y = 1 + 3\sqrt{-1}$ und $y = 1 - 3\sqrt{-1}$. Substituirt man daher im Trinom $3y^2 - 6y + 30$ für y beliebige reelle Werthe, z. B. 2 und −2, so erhält man der Regel gemäß für $y = 2$ das Trinom $= 30$, und für $y = -2$ das Trinom $= 54$.

Noch einige schwierige Beispiele über Maximum und Minimum nebst den Auflösungen.

§. 13.

Zur Anwendung der Regeln über das Trinom des zweiten Grades werden wir nun noch einige Aufgaben über das Maximum und Minimum der Functionen auflösen.

Aufgabe 1. Das Maximum, oder Minimum der Function $y = \frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14}$ zu bestimmen.

Auflösung. 1) Die Gleichung $y = \frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14}$ verschafft $x = 1 + 3y \pm \sqrt{9y^2 - 8y - 20}$.

2) Die Gleichung $9y^2 - 8y - 20 = 0$ verschafft $y = 2$ und $y = -\frac{10}{9}$.

Da nun y zwei reelle ungleiche Werthe hat, so wird der Ausdruck $\sqrt{9y^2 - 8y - 20}$ für jeden Werth von y, welcher innerhalb der beiden Werthe $y = 2$ und $y = -\frac{10}{9}$ fällt, imaginär (§. 8), für jeden Werth von y aber, welcher außerhalb dieser beiden Werthe fällt, reell (§. 9); so, daß also $y = 2$ ein Minimum (für die eine Reihe von Werthen, welche die gegebene Function annehmen kann) und $y = -\frac{10}{9}$ ein Maximum (für die andere Reihe von Werthen, welche die gegebene Function annehmen kann) abgibt. Dem Minimum von y entspricht $x = 1 + 3y = 1 + 6 = 7$, dem Maximum von y entspricht $x = 1 + 3y = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}$.

Aufgabe 2. Das Maximum, oder Minimum der in der Gleichung $2(a + by)x = d + 2yx^2$ enthaltenen Function $y = f(x)$ zu bestimmen.

Auflösung. 1) Die Gleichung $2(a + by)x = d + 2yx^2$ verschafft $x = \frac{a + by \pm \sqrt{b^2y^2 + (2ab - 2d)y + a^2}}{2y}$.

2) Die Gleichung $b^2y^2 + (2ab - 2d)y + a^2 = 0$ verschafft $y = \frac{d - ab \pm \sqrt{(d - ab)^2 - a^2b^2}}{b^2}$.

3) In der Voraussetzung nun, der Ausdruck $\sqrt{(d - ab)^2 - a^2b^2}$ sey eine reelle Größe, folgern wir: da y zwei reelle ungleiche Werthe hat, so wird der Ausdruck $\sqrt{b^2y^2 + (2ab - 2d)y + a^2}$ für jeden Werth von y, welcher innerhalb der beiden Werthe von

$y = \frac{d - ab + \sqrt{(d - ab)^2 - a^2b^2}}{b^2}$ und

$y = \frac{d - ab - \sqrt{(d - ab)^2 - a^2b^2}}{b^2}$ fällt, imaginär (§. 8), für jeden Werth von y aber, welcher außerhalb dieser beiden Werthe fällt, reell (§. 9); so, daß also $y = \frac{d - ab + \sqrt{(d - ab)^2 - a^2b^2}}{b^2}$ ein Minimum (für die eine Reihe von Werthen, welche die in der gegebenen Gleichung enthaltene Function $y = f(x)$ annehmen kann) und $y = \frac{d - ab - \sqrt{(d - ab)^2 - a^2b^2}}{b^2}$ ein Maximum (für die andere Reihe von Werthen, welche die in der gegebenen Gleichung enthaltene Function $y = f(x)$ annehmen kann) abgibt. Dem Minimum von y entspricht $x = \frac{a + by}{2y} = \frac{ab^2}{2(d - ab + \sqrt{(d - ab)^2 - a^2b^2})} + \frac{b}{2}$, dem Maximum von y entspricht $x = \frac{a + by}{2y} = \frac{ab^2}{2(d - ab - \sqrt{(d - ab)^2 - a^2b^2})} + \frac{b}{2}$.

Aufgabe 3. Das Maximum, oder Minimum der in der Gleichung $(y + x)(b + x) = cx$ enthaltenen Function $y = f(x)$ zu bestimmen.

Auflösung. 1) Aus der Gleichung $(y + x)(b + x) = cx$ ist $x = \frac{c - b - y \pm \sqrt{y^2 - (2b + 2c)y + b^2 + c^2 - 2bc}}{2}$.

2) Aus der Gleichung $y^2 - (2b + 2c)y + b^2 + c^2 - 2bc = 0$ ist $y = b + c \pm 2\sqrt{bc}$.

3) Da nun y zwei reelle ungleiche Werthe hat, so wird der Ausdruck $\sqrt{y^2 - (2b + 2c) y + b^2 + c^2 - 2bc}$ für jeden Werth von y, welcher innerhalb der beiden Werthe $y = b + c + 2\sqrt{bc}$ und $y = b + c - 2\sqrt{bc}$ fällt, imaginär (§. 8), für jeden Werth von y aber, welcher außerhalb dieser beiden Werthe fällt, reell (§. 9); so, daß also $y = b + c + 2\sqrt{bc}$ ein Minimum (für die eine Reihe von Werthen, welche die in der gegebenen Gleichung enthaltene Function $y = f(x)$ annehmen kann) und $y = b + c - 2\sqrt{bc}$ ein Maximum (für die andere Reihe von Werthen, welche die in der gegebenen Gleichung enthaltene Function $y = f(x)$ annehmen kann) abgibt. Dem Minimum von y entspricht $x = \frac{c - b - y}{2} = -(b + \sqrt{bc})$, dem Maximum von y entspricht $x = \frac{c - b - y}{2} = - b + \sqrt{bc}$.

Aufgabe 4. Das Maximum, oder Minimum der in der Gleichung $x^2 - 8x + 4y = y^2 - 11$ enthaltenen Function $y = f(x)$ zu bestimmen.

Auflösung. 1) Aus der Gleichung $x^2 - 8x + 4y = y^2 - 11$ ist $x = 4 \pm \sqrt{y^2 - 4y + 5}$.

2) Aus der Gleichung $y^2 - 4y + 5 = 0$ ist $y = 2 \pm \sqrt{-1}$.

3) Da nun y zwei imaginäre Werthe hat, so bleibt der Ausdruck $\sqrt{y^2 - 4y + 5}$ und mit ihm x eine reelle Größe, welche reelle Werthe man auch für y substituiren mag (§. 11). Es hat demnach die in der gegebenen Gleichung enthaltene Function $y = f(x)$ weder Maximum, noch Minimum *.

---

* Im Vorhergehenden wurde gelehrt, daß und wie sich das Maximum, oder Minimum der expliciten und impliciten Functionen einer Veränderlichen, welche in einer Gleichung enthalten sind, die in Bezug auf diese Veränderliche quadratisch ist, vollständig bestimmen läßt. Es genügt das hierüber Vorgetragene zur Auflösung der wichtigsten Aufgaben über Maximum und Minimum in der analytischen Geometrie der Ebene. Die vollständige Lehre vom Maximum und Minimum der Functionen gehört in die Differenzial-Rechnung.

Zweite Abhandlung.

Die Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten *.

Die Auflösung der Gleichung $A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2=0$ in Rationalzahlen.

§. 14.

Es sey (I) $A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2=0$ irgend eine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten x, y, worin die Coefficienten A, B, C, D, E, F bekannte, jedoch beliebige Rationalzahlen vorstellen. Suchen wir nun y als f (x) auszudrücken, so erhalten wir $y=-\frac{Ex+C}{2F}\pm\frac{\sqrt{(Ex+C)^2-4F(A+Bx+Cx^2)}}{2F}$, od. (II) $2Fy+Ex+C=\pm\sqrt{C-4AF+(2CE-4BF)x+(E^2-4DF)x^2}$.

Bei der Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichung (I) werden nun in der Regel für x und y entweder beliebige Rationalzahlen, oder ganze Rationalzahlen verlangt.

Was die Auflösung der Gleichung (I) in beliebigen Rationalzahlen für x und y betrifft, so erkennt man aus der Gleichung (II), daß jede Rationalzahl x, welche den Ausdruck

$\sqrt{C-4AF+(2CE-4BF)x+(E^2-4DF)x^2}$ rational macht,

---

* 1. Die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades, welche wir hier voraussetzen, und die der unbestimmten quadratischen Gleichungen, so weit sie diese Abhandlung umfaßt, sind die leichtesten und in praktischer Hinsicht wohl die wichtigsten Zweige der unbestimmten Analytik, worunter man die Lehre der unbestimmten Gleichungen versteht.

2. Die unbestimmten Aufgaben nennt man auch diophantische Aufgaben, weil der griechische Mathematiker Diophantus zuerst solche Aufgaben geschrieben und aufgelöst hat. Wir besitzen noch eine Sammlung arithmetischer Aufgaben von Diophantus.

auch eine Rationalzahl für y abgibt, und also im Allgemeinen die Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y, wenn für x und y beliebige Rationalzahlen verlangt werden, davon abhängt, ob man für x Rationalzahlen finden kann, welche die Ausdrücke von der Form $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational machen, oder was dasselbe sagen will, die Ausdrücke von der Form $a + bx + cx^2$ in Quadrate verwandeln, deren Wurzeln rationale Zahlen sind.

Was ferner die Auflösung der Gleichung (I) in ganzen Rationalzahlen für x und y betrifft, so erkennt man aus der Gleichung (II), daß jede ganze Rationalzahl x, welche den Ausdruck $\sqrt{C - 4AF + (2CE - 4BF)x + (E^2 - 4DF)x^2}$, den wir der Kürze wegen $= z$ setzen wollen, rational macht und noch überdieß den Ausdruck $-(Ex + C) \pm z$ in eine durch $2F$ theilbare Zahl verwandelt, auch eine ganze Rationalzahl für y abgibt, und also im Allgemeinen die Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y, wenn für x und y ganze Rationalzahlen verlangt werden, vor Allem und hauptsächlich davon abhängt, ob man für x ganze Rationalzahlen finden kann, welche die Ausdrücke von der Form $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational machen, oder was dasselbe sagen will, die Ausdrücke von der Form $a + bx + cx^2$ in Quadrate verwandeln, deren Wurzeln rationale Zahlen sind.

§. 15.

Die Auflösung der Gleichung (I) kann sich für besondere Werthe der Coefficienten von x und y sehr vereinfachen. Wird z. B. der Coefficient $F = 0$ gesetzt, so verschwindet das Quadrat von y aus der Gleichung (I), und diese verwandelt sich in die Gleichung

$$\text{(III)}\ A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy = 0,$$

woraus $\text{(IV)}\ y = -\frac{A + Bx + Dx^2}{C + Ex}$.

Was nun die Auflösung der Gleichung (III) in beliebigen Rationalzahlen für x und y betrifft, so erkennt man aus der Gleichung (IV), daß jede Rationalzahl x auch eine Rationalzahl y abgibt. Was ferner die Auflösung der Gleichung (III) in ganzen Rationalzahlen für x und y betrifft, so erkennt man aus der Gleichung (IV), daß jede ganze Rationalzahl x, welche den Ausdruck

$A + Bx + Dx^2$ in eine durch $C + Ex$ theilbare Zahl verwandelt, auch eine ganze Rationalzahl für y abgibt.

§. 16.

Werden die Coefficienten F und D gleich 0 gesetzt, so verschwinden die Quadrate von x und y aus der Gleichung (I), und diese verwandelt sich in

$$\text{(V)}\ A + Bx + Cy + Exy = 0,$$

woraus (VI) $y = -\frac{A + Bx}{C + Ex}$.

Was nun die Auflösung der Gleichung (V) in beliebigen Rationalzahlen für x und y betrifft, so erkennt man aus der Gleichung (VI), daß jede ganze Rationalzahl x, welche den Ausdruck $A + Bx$ in eine durch $C + Ex$ theilbare Zahl verwandelt, auch eine ganze Rationalzahl für y abgibt.

Die Auflösung der Gleichungen $A + Bx + Cy + Exy = 0$ und $A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy = 0$ in ganzen Zahlen.

§. 17.

Aufgabe. Die Gleichung (I) $A + Bx + Cy + Exy = 0$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Wir suchen die eine Unbekannte als Function der andern, etwa y als f (x), und erhalten

$$y = -\frac{A + Bx}{C + Ex},$$

oder, wenn wir die angedeutete Division wirklich ausführen und hierauf alle Glieder der Gleichung mit E multipliciren,

$$Ey = -B + \frac{BC - AE}{C + Ex},$$

oder, wenn wir $BC - AE = N$ setzen,

$$\text{(II)}\ Ey = -B + \frac{N}{C + Ex}.$$

Da es sich nun darum handelt, für x und y ganze Zahlen zu finden, so muß N in der Gleichung (II) für alle Werthe von x und y, welche der Gleichung (I) als Wurzeln entsprechen sollen, durch $C + Ex$ theilbar seyn. Wir setzen daher $C + Ex$ successive gleich den sämmtlichen Theilen von N und substituiren hierauf die ganzen

Zahlen, welche sich aus diesen Gleichungen für x ergeben, successive in der Gleichung (II), um die ganzen Zahlen zu finden, welche sich hiedurch für y ergeben. Jede auf diese Weise erhaltene ganze Zahl y bildet alsdann mit der ihr entsprechenden ganzen Zahl x eine Auflösung der Gleichung (I). Daß die Anzahl dieser Auflösungen nie größer, wohl aber kleiner als die Anzahl der positiven und negativen Theiler der Zahl N und manchmal sogar gleich 0 seyn kann, versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst.

§. 18.

Aufgabe. Die Gleichung (I) $A+Bx+Cy+Dx^2+Exy=0$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Wir suchen die Unbekannte y, welche bloß auf der ersten Potenz vorkommt, als Function der andern Unbekannten x, und erhalten

$$y = -\frac{A+Bx+Dx^2}{C+Ex},$$

oder, indem wir die angedeutete Division wirklich ausführen und hierauf alle Glieder der Gleichung mit E^2 multipliciren,

$$E^2y = -DEx - BE + CD - \frac{AE^2 - BCE + C^2D}{C+Ex},$$

oder, indem wir $AE^2 - BCE + C^2D = N$ setzen,

$$\text{(II)}\quad E^2y = -DEx - BE + CD - \frac{N}{C+Ex}.$$

Wie in §. 17 und auch aus demselben Grunde setzen wir nun $C+Ex$ successive gleich den sämmtlichen Theilern von N und substituiren hierauf die ganzen Zahlen, welche sich aus diesen Gleichungen für x ergeben, successive in der Gleichung (II), um die ganzen Zahlen zu finden, welche sich hiedurch für y ergeben. Jede auf diese Weise erhaltene ganze Zahl y bildet alsdann mit der ihr entsprechenden ganzen Zahl x eine Auflösung der Gleichung (I). Daß die Anzahl dieser Auflösungen nie größer, wohl aber kleiner als die Anzahl der positiven und negativen Theiler der Zahl N und manchmal sogar gleich 0 seyn kann, versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst.

Verschiedene Beispiele nebst den Auflösungen.

§. 19.

Beispiel 1. Die Gleichung (I) $xy = 2x + 2y + 20$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Wir suchen die eine Unbekannte als Function der andern, etwa y als $f(x)$, und finden

$$y = \frac{2x + 20}{x - 2}, \text{ oder}$$

$$\text{(II) } y = 2 + \frac{24}{x - 2}.$$

Wir setzen sofort $x - 2$ successive gleich allen positiven Theilern von 24, und substituiren hierauf die ganzen Zahlen, welche sich aus diesen Gleichungen für x ergeben, successive in der Gleichung (II), um die entsprechenden ganzen Zahlen für y zu finden, wie folgt:

$x - 2 =$	1	2	3	4	6	8	12	24
$x =$	3	4	5	6	8	10	14	26
$y =$	26	14	10	8	6	5	4	3.

Die erhaltenen acht Paar Zahlenwerthe von x und y bilden demnach die acht möglichen Auflösungen der Gleichung (I) in ganzen positiven Zahlen. Weil die Gleichung (I) in Bezug auf x und y symmetrisch ist, so wurden auch die Werthe von x und y einander abwechslungsweise gleich.

Beispiel 2. Die Gleichung (I) $5xy = 2x + 3y + 18$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Wir suchen die eine Unbekannte als Function der andern, etwa x als $f(y)$, und finden

$$x = \frac{3y + 18}{5y - 2} = \frac{3}{5} + \frac{96}{5(5y - 2)},$$

$$\text{oder (II) } 5x = 3 + \frac{96}{5y - 2}.$$

Wir setzen sofort $5y - 2$ successive gleich allen positiven Theilern von 96 und substituiren hierauf die ganzen Zahlen, welche sich aus diesen Gleichungen für x ergeben, successive in der Gleichung (II), um die entsprechenden ganzen Zahlen für y zu finden, wie folgt:

$5y - 2 =$	1	2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	96
$y =$	»	»	1	»	»	2	»	»	»	»	10	»
$x =$	»	»	7	»	»	3	»	»	»	»	1	».

Die erhaltenen drei Paar Zahlenwerthe von x und y bilden demnach die drei möglichen Auflösungen der Gleichung (I) in ganzen positiven Zahlen.

Beispiel 3. Die Gleichung (I) $xy + x^2 = 2x + 3y + 29$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Da x im Quadrat, y aber nur auf der ersten Potenz vorkommt, so suchen wir y als f (x) und finden

$$y = \frac{x^2 - 2x - 29}{-x + 3},$$

$$\text{oder (II) } y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3}.$$

Wir setzen sofort $x - 3$ successive gleich allen positiven Theilern von 26, und substituiren hierauf die ganzen Zahlen, welche sich aus diesen Gleichungen für x ergeben, successive in der Gleichung (II), um die entsprechenden ganzen positiven Zahlen für y zu finden, wie folgt:

$x - 3 = 1$	2	13	26
$x = 4$	5	16	29
$y = 21$	7	„	„ .

Die erhaltenen zwei Paar Zahlenwerthe von x und y bilden demnach die zwei möglichen Auflösungen der Gleichung (I) in ganzen positiven Zahlen.

Beispiel 4. Die Gleichung (I) $2xy - 3x^2 + y = 1$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Da x im Quadrat, y aber nur auf der ersten Potenz vorkommt, so suchen wir y als f (x) und finden

$$y = \frac{3x^2 + 1}{2x + 1} = \frac{3x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{4(2x + 1)},$$

$$\text{oder (II) } 4y = 6x - 3 + \frac{7}{2x + 1}.$$

Wir setzen sofort $2x + 1$ successive gleich allen positiven Theilern von 7, und substituiren hierauf die ganzen Zahlen, welche sich aus diesen Gleichungen für x ergeben, successive in der Gleichung (II), um die entsprechenden ganzen positiven Zahlen für y zu finden, wie folgt:

$2x + 1 = 1$	7
$x =$ „	3
$y =$ „	4

Das erhaltene Paar Zahlenwerthe von x und y bildet demnach die einzig mögliche Auflösung der Gleichung (I) in ganzen positiven Zahlen.

Beispiel 5. Es werden zwei ganze positive Zahlen verlangt, deren Product ihren doppelten Unterschied um 100 übertrifft. Welche Zahlen sind es?

Auflösung. Setzt man die eine Zahl = x, die andere = y, so erhält man der Aufgabe gemäß

$$xy = 2(x - y) + 100,$$

welcher Gleichung folgende zehn Auflösungen in ganzen positiven Zahlen entsprechen:

x = 1	2	4	6	10	14	22	30	46	94
y = 34	26	18	14	10	8	6	5	4	3.

Beispiel 6. Wie groß sind die Seiten eines Rechtecks, dessen Fläche viermal so viele Quadratfuß als sein Umfang Längenfuß enthält?

Auflösung. Die Basis des Rechtecks sey x Fuß, seine Höhe y Fuß lang, so beträgt sein Flächeninhalt xy Quadratfuß, sein Umfang 2x + 2y Längenfuß, und man erhält der Aufgabe gemäß

$$xy = 4(2x + 2y),$$

welcher Gleichung folgende vier Auflösungen in ganzen positiven Zahlen entsprechen:

x = 9	10	12	16
y = 72	40	24	16.

Beispiel 7. Die Seite eines Quadrats mißt 20 Fuß. Die Seiten eines Rechtecks zu finden, dessen Umfang sich zu dem des Quadrats gerade so verhält, wie die Fläche des Rechtecks zu der des Quadrats.

Auflösung. Die Basis des Rechtecks sey x Fuß, seine Höhe y Fuß, so beträgt sein Flächeninhalt xy Quadratfuß, sein Umfang 2x + 2y Längenfuß, und es verhält sich der Aufgabe gemäß

$$2x + 2y : 4 \times 20 = xy : 20 \times 20,$$

$$\text{woraus } xy = 10x + 10y,$$

welcher Gleichung folgende fünf Auflösungen in ganzen positiven Zahlen entsprechen:

x = 110	60	35	30	20
y = 11	12	14	15	20.

Beispiel 8. Die Seite eines Würfels mißt 8 Fuß. Die Seite der Grundfläche und die Höhe des rechtwinkligen Parallelepipeds zu bestimmen, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, wenn sich der Cubikinhalt des Würfels zu dem des Parallelepipeds gerade so verhalten soll, wie die Oberfläche des Würfels zu der des Parallelepipeds.

Auflösung. Die Seite der Grundfläche des Parallelepipeds sey x Fuß, seine Höhe y Fuß lang, so enthält seine Grundfläche x^2 Quadratfuß, seine Oberfläche $4xy + 2x^2$ Quadratfuß, sein Inhalt x^2y Cubikfuß, und es verhält sich der Aufgabe gemäß

$$8^3 : x^2y = 6 \times 8^2 : 4xy + 2x^2,$$

woraus $3xy = 16y + 8x$,

welcher Gleichung folgende vier Auflösungen in ganzen positiven Zahlen entsprechen:

$x = 48$	16	8	6
$y = 3$	4	8	24.

Das Rationalmachen der Ausdrücke von den Formen $\sqrt{a + bx + cx^2}$, $\sqrt{ay^2 + bxy + cx^2}$, $\sqrt{(fx+g)(hx+k)}$, $\sqrt{(dx+e)^2 + (fx+g)(hx+k)}$ nebst Uebungsbeispielen.

§. 20.

Wie wir gesehen haben, hängt im Allgemeinen die Auflösung der Gleichung $A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$ in rationalen Zahlen davon ab, ob man für x Rationalzahlen finden kann, welche die Ausdrücke von der Form $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational machen, oder was dasselbe sagen will, die Ausdrücke von der Form $a + bx + cx^2$ in vollkommene Quadrate (rationale Quadratzahlen) verwandeln (§. 14). Das Rationalmachen solcher Wurzelausdrücke richtet sich nach der besondern Beschaffenheit der Coefficienten a, b, c; es gelingt nicht immer und gehört in manchen Fällen zu den schwierigsten Aufgaben der unbestimmten Analytik. Wir wollen nun diejenigen Fälle nach einander vorführen, in welchen sich das Rationalmachen der Ausdrücke von der Form $\sqrt{a + bx + cx^2}$, sowie auch der Ausdrücke von der noch allgemeineren Form $\sqrt{ay^2 + bxy + cx^2}$ leicht bewerkstelligen läßt.

§. 21.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a + bx}$ rational machen oder den Ausdruck $a + bx$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn a und b beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. Setzt man den Ausdruck

$$\sqrt{a + bx} = p,$$

so erhält man $a + bx = p^2$

$$\text{und } x = \frac{p^2 - a}{b}$$

Probe. $a + b\left(\frac{p^2 - a}{b}\right) = p^2$.

Für p können nun beliebige Rationalzahlen angenommen werden, wenn a und b bestimmt sind, und es ergeben sich alsdann die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel. Betrachtet man den Ausdruck $\sqrt{3 + 5x}$, wo $a = 3$, $b = 5$, so erhält man durch die Substitution von $p = 1 : x = -\frac{2}{5}$, $\sqrt{3 + 5x} = 1$; ferner durch die Substitution von $p = 2 : x = \frac{1}{5}$, $\sqrt{3 + 5x} = 2$, ꝛc.

§. 22.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{bx + cx^2}$ rational machen oder den Ausdruck $bx + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn b und c beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. Setzt man den Ausdruck

$$\sqrt{bx + cx^2} = \frac{p}{q}.x,$$

$$\text{so ist } bx + cx^2 = \frac{p^2x^2}{q^2},$$

$$b + cx = \frac{p^2x}{q^2}$$

$$\text{und } x = \frac{bq^2}{p^2 - cq^2}.$$

Probe. $b\left(\frac{bq^2}{p^2-cq^2}\right) + c\left(\frac{bq^2}{p^2-cq^2}\right)^2 = \left(\frac{bpq}{p^2-cq^2}\right)^2$.

Wählt man nun für p und q beliebige Rationalzahlen, wenn a und b bestimmt sind, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel. Beim Ausdrucke $\sqrt{5x + 7x^2}$, wo $b = 5$, $c = 7$, erhält man durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1$: $x = -\frac{5}{6}$, $\sqrt{5x + 7x^2} = \frac{5}{6}$; ferner durch die Substitution von $p = 1$, $q = 2$: $x = -\frac{20}{27}$, $\sqrt{5x + 7x^2} = \frac{10}{27}$, ꝛc.

§. 23.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a + \gamma^2 x^2}$ rational machen oder den Ausdruck $a + \gamma^2 x^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn a und γ beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. Da $\sqrt{\gamma^2 x^2} = \gamma x$, so setzt man den Ausdruck

$$\sqrt{a + \gamma^2 x^2} = \gamma x + \frac{p}{q}, \text{ und}$$

$$\text{erhält } a + \gamma^2 x^2 = \gamma^2 x^2 + \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\gamma p x}{q}$$

$$a = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\gamma p x}{q}$$

$$\text{und } x = \frac{aq^2 - p^2}{2\gamma pq}.$$

Probe. $a + \gamma^2 \left(\frac{aq^2 - p^2}{2\gamma pq}\right)^2 = \left(\frac{aq^2 + p^2}{2pq}\right)^2$.

Für p und q können nun beliebige Rationalzahlen angenommen werden, wenn a und γ bestimmt sind, und es ergeben sich alsdann die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel. Beim Ausdrucke $\sqrt{11 + 36x^2}$, wo $a = 11$, $\gamma = 6$, erhält man durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1$: $x = \frac{5}{6}$, $\sqrt{11 + 36x^2} = 6$; ferner durch die Substitution von $p = 1$, $q = 2$: $x = \frac{43}{24}$, $\sqrt{11 + 36x^2} = \frac{45}{4}$, ꝛc.

§. 24.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{\alpha^2 + cx^2}$ rational machen oder den Ausdruck $\alpha^2 + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn α und c beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. Da $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, so setzen wir den Ausdruck

$$\sqrt{\alpha^2 + cx^2} = \alpha + \frac{p}{q} \cdot x,$$

und erhalten $\alpha^2 + cx^2 = \alpha^2 + \frac{p^2x^2}{q^2} + \frac{2\alpha px}{q}$

$$cx = \frac{p^2x}{q^2} + \frac{2\alpha p}{q}$$

$$\text{und } x = \frac{2\alpha pq}{cq^2 - p^2}.$$

Probe. $\alpha^2 + c\left(\frac{2\alpha pq}{cq^2 - p^2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha p^2 + \alpha cq^2}{cq^2 - p^2}\right)^2$.

Wählt man nun für p und q beliebige Rationalzahlen, wenn α und c bestimmt sind, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel. Betrachten wir den Ausdruck $\sqrt{64 + 7x^2}$, wo $\alpha = 8$, $c = 7$, so erhalten wir durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1 : x = \frac{8}{3}$, $\sqrt{64 + 7x^2} = \frac{32}{3}$; ferner durch die Substitution von $p = 2$, $q = 1 : x = \frac{32}{3}$, $\sqrt{64 + 7x^2} = \frac{88}{3}$, 2c.

§. 25.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{ay^2 + \gamma^2x^2}$ rational machen oder den Ausdruck $ay^2 + \gamma^2x^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn a und γ beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. Da $\sqrt{\gamma^2x^2} = \gamma x$, so setzt man den Ausdruck

$$\sqrt{ay^2 + \gamma^2x^2} = \gamma x + \frac{p}{q} \cdot y,$$

und erhält $ay^2 + \gamma^2x^2 = \gamma^2x^2 + \frac{p^2y^2}{q^2} + \frac{2\gamma pxy}{q}$

$$a = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\gamma p}{q} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\text{und } \frac{x}{y} = \frac{aq^2 - p^2}{2\gamma pq}.$$

Die Werthe von $x = aq^2 - p^2$, $y = 2\gamma pq$ genügen der Forderung der Aufgabe; denn

$$a(2\gamma pq)^2 + \gamma^2(aq^2 - p^2)^2 = \gamma^2(aq^2 + p^2)^2.$$

Für p und q können nun beliebige Rationalzahlen angenommen werden, wenn a und γ bestimmt sind, und es ergeben sich alsdann die verschiedenen Werthe von x und y.

Beispiel. Beim Ausdrucke $\sqrt{2y^2 + x^2}$, wo $a = 2$, $\gamma = 1$, erhält man durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1 : x = 1$, $y = 2$,

$\sqrt{2y^2 + x^2} = 3$; ferner durch die Substitution von $p = 2$, $q = 1$: $x = -2$, $y = 4$, $\sqrt{2y^2 + x^2} = 6$, ꝛc.

§. 26.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a + bx + \gamma^2x^2}$ rational machen oder den Ausdruck $a + bx + \gamma^2x^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn a, b und γ beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. Da $\sqrt{\gamma^2x^2} = \gamma x$, so setzen wir den Ausdruck

$$\sqrt{a + bx + \gamma^2x^2} = \gamma x + \frac{p}{q},$$

und erhalten $a + bx + \gamma^2x^2 = \gamma^2x^2 + \dfrac{p^2}{q^2} + \dfrac{2\gamma px}{q}$

$$a + bx = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\gamma px}{q}$$

$$\text{und } x = \frac{p^2 - aq^2}{bq^2 - 2\gamma pq}.$$

Probe. $a + b\left(\dfrac{p^2 - aq^2}{bq^2 - 2\gamma pq}\right) + \gamma^2\left(\dfrac{p^2 - aq^2}{bq^2 - 2\gamma pq}\right)^2$

$$= \left(\frac{\gamma p^2 - bpq + a\gamma q^2}{bq^2 - 2\gamma pq}\right)^2.$$

Wählt man nun für p und q beliebige Rationalzahlen, wenn a, b und γ bestimmt sind, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel. Betrachten wir den Ausdruck $\sqrt{2 + 3x + 4x^2}$, wo $a = 2$, $b = 3$, $\gamma = 2$, so erhalten wir durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1$: $x = 1$, $\sqrt{2 + 3x + 4x^2} = 3$; ferner durch die Substitution von $p = 3$, $q = 2$: $x = -\frac{1}{12}$, $\sqrt{2 + 3x + 4x^2} = \frac{4}{3}$, ꝛc.

§. 27.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{\alpha^2 + bx + cx^2}$ rational machen oder den Ausdruck $\alpha^2 + bx + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn α, b und c beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. In Betracht, daß $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, setzen wir den Ausdruck $\sqrt{\alpha^2 + bx + cx^2} = \alpha + \frac{p}{q} . x$, und

erhalten $\alpha^2 + bx + cx^2 = \alpha^2 + \frac{p^2x^2}{q^2} + \frac{2\alpha px}{q}$

$$b + cx = \frac{p^2x}{q^2} + \frac{2\alpha p}{q}$$

$$\text{und } x = \frac{bq^2 - 2\alpha pq}{p^2 - cq^2}.$$

Probe. $\alpha^2 + b\left(\frac{bq^2 - 2\alpha pq}{p^2 - cq^2}\right) + c\left(\frac{bq^2 - 2\alpha pq}{p^2 - cq^2}\right)^2$

$$= \left(\frac{\alpha p^2 - bpq + \alpha cq^2}{p^2 - cq^2}\right)^2$$

Für p und q können nun beliebige Rationalzahlen angenommen werden, wenn α, b und c bestimmt sind, und es ergeben sich alsdann die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel. Beim Ausdrucke $\sqrt{1 + 2x + 3x^2}$, wo $\alpha = 1$, $b = 2$, $c = 3$, erhalten wir durch die Substitution von $p = 2$, $q = 1 : x = -2$, $\sqrt{1 + 2x + 3x^2} = 3$; ferner durch die Substitution von $p = 3$, $q = 1 : x = -\frac{2}{3}$, $\sqrt{1 + 2x + 3x^2} = 1$, 2c.

§. 28.

Aufgabe. Werthe für x und y zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{ay^2 + bxy + \gamma^2x^2}$ rational machen oder den Ausdruck $ay^2 + bxy + \gamma^2x^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn a, b und γ beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. In Betracht, daß $\sqrt{\gamma^2x^2} = \gamma x$, setzen wir den Ausdruck $\sqrt{ay^2 + bxy + \gamma^2x^2} = \gamma x + \frac{p}{q} . y$,

und erhalten $ay^2 + bxy + \gamma^2x^2 = \gamma^2x^2 + \frac{p^2y^2}{q^2} + \frac{2\gamma pxy}{q}$

$$ay^2 + bxy = \frac{p^2y^2}{q^2} + \frac{2\gamma pxy}{q}$$

$$a + b . \frac{x}{y} = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2\gamma p}{q} . \frac{x}{y}$$

$$\text{und } \frac{x}{y} = \frac{p^2 - aq^2}{bq^2 - 2\gamma pq}.$$

Die Werthe von $x = p^2 - aq^2$, $y = bq^2 - 2\gamma pq$ genügen der Forderung der Aufgabe; denn

$$a(bq^2 - 2\gamma pq)^2 + b(bq^2 - 2\gamma pq)(p^2 - aq^2) + \gamma^2(p^2 - aq^2)^2$$
$$= (\gamma p^2 - bpq + \gamma aq^2)^2.$$

Wählt man nun für p und q beliebige Rationalzahlen, wenn a, b und γ bestimmt sind, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von x und y.

Beispiel. Beim Ausdrucke $\sqrt{3y^2 + 2xy + x^2}$, wo $a = 3$, $b = 2$, $\gamma = 1$, erhalten wir durch die Substitution von $p = 2$, $q = 1$: $x = 1$, $y = -2$, $\sqrt{3y^2 + 2xy + x^2} = 3$; ferner durch die Substitution von $p = 5$, $q = 3$: $x = -2$, $y = -12$, $\sqrt{3y^2 + 2xy + x^2} = 22$, 2c.

§. 29.

In den vorhergehenden Auflösungen wurde das Rationalmachen der Ausdrücke von der Form $\sqrt{a + bx + cx^2}$ durch die besondere Beschaffenheit der Coefficienten a, c sehr erleichtert; entweder war nämlich $a = 0$, oder $c = 0$, oder $a = \alpha^2$, d. h. eine rationale Quadratzahl, oder $c = \gamma^2$, d. h. eine rationale Quadratzahl. Wenn nun aber die Coefficienten a, c keine rationale Quadratzahlen, sondern beliebige andere Rationalzahlen bezeichnen, so ist das Rationalmachen solcher Ausdrücke nicht mehr so leicht und häufig ganz unmöglich. In folgenden drei Fällen gelingt jedoch das Rationalmachen des Ausdruckes $\sqrt{a + bx + cx^2}$ auch dann noch vollständig und ohne Schwierigkeit: 1) wenn sich der Ausdruck $a + bx + cx^2$ in zwei rationale Factoren zerfällen läßt, 2) wenn sich der Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein Aggregat zweier Ausdrücke auflösen läßt, von welchen der eine eine rationale Quadratzahl und der andere ein Product von zwei rationalen Factoren ist, 3) wenn sich auf irgend eine Weise, etwa durchs bloße Probiren, auch nur eine einzige Rationalzahl für x finden läßt, welche den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandelt. Die nun folgenden Aufgaben sollen von diesen Fällen handeln.

§. 30.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{(fx + g)(hx + k)}$ rational machen oder den Ausdruck $(fx + g)(hx + k)$ in ein vollkommenes

Quadrat verwandeln, wenn f, g, h, k beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. Setzt man den Ausdruck

$$\sqrt{(fx + g)(hx + k)} = \frac{p}{q}(fx + g), \text{ so}$$

erhält man $(fx + g)(hx + k) = \frac{p^2}{q^2}(fx + g)^2$

$$hx + k = \frac{p^2}{q^2}(fx + g)$$

und $x = \frac{gp^2 - kq^2}{hq^2 - fp^2}$.

Für p und q können nun beliebige Rationalzahlen angenommen werden, wenn f, g, h und k bestimmt sind, und es ergeben sich alsdann die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel 1. Beim Ausdrucke $\sqrt{(x + 2)(3x + 5)}$, wo $f = 1$, $g = 2$, $h = 3$, $k = 5$, erhält man durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1 : x = -\frac{3}{2}$, $\sqrt{(x + 2)(3x + 5)} = \frac{1}{2}$; ferner durch die Substitution von $p = 1$, $q = 2 : x = -\frac{18}{11}$, $\sqrt{(x + 2)(3x + 5)} = \frac{2}{11}$, ꝛc.

Beispiel 2. Beim Ausdrucke $\sqrt{x(2x + 1)}$, wo $f = 1$, $g = 0$, $h = 2$, $k = 1$, erhält man durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1 : x = -1$, $\sqrt{x(2x + 1)} = 1$; ferner durch die Substitution von $p = 1$, $q = 2 : x = -\frac{4}{7}$, $\sqrt{x(2x + 1)} = \frac{2}{7}$, ꝛc.

§. 31.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{(dx + e)^2 + (fx + g)(hx + k)}$ rational machen oder den Ausdruck $(dx + e)^2 + (fx + g)(hx + k)$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn d, e, f, g, h und k beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. In Betracht, daß $\sqrt{(dx + e)^2} = dx + e$, setzen wir den Ausdruck

$$\sqrt{(dx + e)^2 + (fx + g)(hx + k)} = dx + e + \frac{p}{q}(fx + g),$$

und erhalten $(dx+e)^2 + (fx+g)(hx+k)$

$$= (dx+e)^2 + \frac{p^2}{q^2}(fx+g)^2 + \frac{2p}{q}(dx+e)(fx+g)$$

$$hx + k = \frac{p^2}{q^2}(fx+g) + \frac{2p}{q}(dx+e)$$

$$\text{und } x = \frac{kq^2 - gp^2 - 2epq}{fp^2 + 2dpq - hq^2}.$$

Wählt man nun für p und q beliebige Rationalzahlen, wenn d, e, f, g, h und k bestimmt sind, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel 1. Beim Ausdrucke $\sqrt{(x+1)^2 + (x+2)(x+3)}$, wo $d=1$, $e=1$, $f=1$, $g=2$, $h=1$, $k=3$, erhält man durch die Substitution von $p=1$, $q=1$: $x = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{(x+1)^2 + (x+2)(x+3)} = 2$; ferner durch die Substitution von $p=2$, $q=1$: $x = -\frac{9}{7}$, $\sqrt{(x+1)^2 + (x+2)(x+3)} = \frac{8}{7}$, rc.

Beispiel 2. Beim Ausdrucke $\sqrt{x^2 + 2(x+1)}$, wo $d=1$, $e=0$, $f=0$, $g=2$, $h=1$, $k=1$, erhält man durch die Substitution von $p=1$, $q=1$: $x=-1$, $\sqrt{x^2+2(x+1)} = 1$; ferner durch die Substitution von $p=2$, $q=1$: $x = -\frac{7}{8}$, $\sqrt{x^2 + 2(x+1)} = \frac{5}{8}$, rc.

§. 32.

Aufgabe. Es sey $x = w$ ein Werth von x, welcher den Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational macht oder den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandelt; andere Werthe von x zu finden, welche dieselbe Eigenschaft besitzen, wenn a, b und c beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Auflösung. Wir verwandeln den Ausdruck

(I) $a + bx + cx^2$ durch die Substitution von $x = w + y$ in

$$\text{(II) } a + bw + cw^2 + (b + 2cw)y + cy^2,$$

in welchem Ausdrucke $a + bw + cw^2$ der Annahme gemäß eine rationale Quadratzahl ist. Wir setzen ferner, der größern Einfachheit wegen, $a + bw + cw^2 = f^2$, $b + 2cw = g$, $c = h$, und erhalten

$$\text{(III) } f^2 + gy + hy^2,$$

in welchem Ausdrucke f, g und h beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Da nun jeder rationale Werth von y, welcher den Ausdruck (III) in ein vollkommenes Quadrat verwandelt, auch einen rationalen Werth für $x = w + y$ abgibt, welcher den Ausdruck (I) in ein vollkommenes Quadrat verwandelt, so setzen wir

$$\sqrt{f^2 + gy + hy^2} = f + \frac{p}{p} \cdot y, \text{ und erhalten}$$

$$f^2 + gy + hy^2 = f^2 + \frac{p^2}{q^2} \cdot y^2 + \frac{2fpy}{q}$$

$$g + hy = \frac{p^2 y}{q^2} + \frac{2fp}{q}$$

$$y = \frac{gq^2 - 2fpq}{p^2 - hq^2},$$

$$x = w + \frac{gq^2 - 2fpq}{p^2 - hq^2}.$$

Für p und q können sofort beliebige Rationalzahlen angenommen werden, wenn f, g und h bestimmt sind, und es ergeben sich alsdann die verschiedenen Werthe von x.

Beispiel 1. Der Ausdruck $\sqrt{2 + 7x^2}$ wird für $x = 1$ rational, da $\sqrt{2 + 7 \cdot 1^2} = 3$. Substituirt man daher $x = 1 + y$ im Ausdrucke $2 + 7x^2$, so verwandelt er sich in $9 + 14y + 7y^2$, für welchen Ausdruck [vergl. (III)] $f = 3$, $g = 14$, $h = 7$, $y = \frac{14q^2 - 6pq}{p^2 - 7q^2}$, $x = 1 + \frac{14q^2 - 6pq}{p^2 - 7q^2}$. Man erhält sofort durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1$: $y = -\frac{4}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$, $\sqrt{2 + 7x^2} = \frac{5}{3}$; ferner durch die Substitution von $p = 2$, $q = 1$: $y = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{3}$, $\sqrt{2 + 7x^2} = \frac{5}{3}$, 2c.

Beispiel 2. Der Ausdruck $\sqrt{11 + 3x + 2x^2}$ wird für $x = 1$ rational, da $\sqrt{11 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2} = 4$. Substituirt man daher $x = 1 + y$ im Ausdrucke $11 + 3x + 2x^2$, so verwandelt er sich in $16 + 7y + 2y^2$, für welchen Ausdruck [vergl. (III)] $f = 4$, $g = 7$, $h = 2$, $y = \frac{7q^2 - 8pq}{p^2 - 2q^2}$, $x = 1 + \frac{7q^2 - 8pq}{p^2 - 2q^2}$. Man erhält sofort durch die Substitution von $p = 1$, $q = 1$: $y = 1$, $x = 2$, $\sqrt{11 + 3x + 2x^2} = 5$; ferner durch die Substitution von $p = 2$, $q = 1$: $y = -\frac{9}{2}$, $x = -\frac{7}{2}$, $\sqrt{11 + 3x + 2x^2} = 5$, 2c.

§. 33.

Aufgabe. Werthe für x zu finden, welche den Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational machen oder den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, wenn a, b und c beliebige Rationalzahlen bezeichnen.

Erste Auflösung. Man zerfälle den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein Product von der Form $(fx + g)(hx + k)$, was jederzeit möglich ist. Enthalten alsdann die beiden Factoren lauter Rationalzahlen, so findet man hierauf nach §. 30 die Werthe von x, welche den Ausdruck $a + bx + cx^2 = (fx + g)(hx + k)$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln; enthalten aber diese Factoren nicht lauter Rationalzahlen, so läßt sich der Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ auf diesem Wege nicht zur Rationalität bringen.

Um den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in zwei Factoren zu zerfällen, kann man $a + bx + cx^2 = 0$ setzen, und erhält durch die Auflösung dieser Gleichung

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}, \text{ oder } 2cx = -b + \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\text{und } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}, \text{ oder } 2cx = -b - \sqrt{b^2 - 4ac},$$

wornach

$$a + bx + cx^2 = (2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}) . (2cx + b + \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Aus der Form der beiden Factoren des Ausdruckes $a + bx + cx^2$ erkennt man zugleich, daß sich der Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ nur dann nach dieser ersten Auflösungsweise zur Rationalität bringen läßt, wenn $\sqrt{b^2 - 4ac}$ eine rationale Zahl ist.

Beispiel 1. Den Ausdruck $\sqrt{10 + 11x + 3x^2}$ rational zu machen.

1) Hier ist $a = 10$, $b = 11$, $c = 3$, $\sqrt{b^2 - 4ac} = 1$, woraus folgt, daß sich der Ausdruck $10 + 11x + 3x^2$ in zwei rationale Factoren zerfällen läßt.

2) Durch die Auflösung der Gleichung

$$10 + 11x + 3x^2 = 0 \text{ erhält man}$$

$$x = -\tfrac{5}{3}, \text{ oder } 3x = -5$$

und $x = -2$, wornach

$$10 + 11x + 3x^2 = (3x + 5) . (x + 2).$$

3) Das Rationalmachen des Ausdruckes $\sqrt{10 + 11x + 3x^2} = \sqrt{(x + 2)(3x + 5)}$ erfolgt nun ganz nach §. 30, wo dieses Beispiel bereits behandelt worden ist.

Beispiel 2. Den Ausdruck $\sqrt{x + 2x^2}$ rational zu machen.

1) Man erkennt sogleich, daß $x + 2x^2 = x(2x + 1)$.

2) Das Rationalmachen des Ausdruckes $\sqrt{x + 2x^2} = \sqrt{x(2x + 1)}$ erfolgt hierauf ganz nach §. 30, wo dieses Beispiel bereits behandelt worden ist.

Zweite Auflösung. Man suche den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein Aggregat von der Form $(dx + e)^2 + (fx + g)(hx + k)$ zu zerfällen. Gelingt es, was nur selten der Fall seyn wird, und enthalten die sämmtlichen Glieder des gesuchten Aggregats lauter Rationalzahlen, so findet man hierauf nach §. 31 die Werthe von x, welche den Ausdruck $a + bx + cx^2 = (dx + e)^2 + (fx + g)(hx + k)$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln; läßt sich aber diese Zerfällung nicht ausführen, wenigstens nicht in lauter Rationalzahlen, so kann der Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ auf diesem Wege nicht zur Rationalität gebracht werden.

Beispiel 1. Den Ausdruck $\sqrt{7 + 7x + 2x^2}$ rational zu machen.

1) Man findet leicht, daß

$$2x^2 + 7x + 7 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 5x + 6$$
$$= (x + 1)^2 + (x + 3)(x + 2).$$

2) Das Rationalmachen des Ausdruckes

$$\sqrt{7 + 7x + 2x^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (x + 3)(x + 2)}$$

erfolgt hierauf ganz nach §. 31, wo dieses Beispiel bereits behandelt worden ist.

Beispiel 2. Den Ausdruck $\sqrt{2 + 2x + x^2}$ rational zu machen.

1) Man erkennt sogleich, daß

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2(x + 1).$$

2) Das Rationalmachen des Ausdruckes

$\sqrt{2 + 2x + x^2} = \sqrt{x^2 + 2(x + 1)}$ erfolgt hierauf ganz nach §. 31, wo dieses Beispiel bereits behandelt worden ist.

Dritte Auflösung. Man suche einen Werth von x zu errathen, der den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandelt. Gelingt dieß, so findet man hierauf nach §. 32 noch beliebig viele andere Werthe von x, welche den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln; gelingt es aber nicht, so kann der Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ nicht auf diesem Wege zur Rationalität gebracht werden.

Um das Errathen eines Werthes von x, der den Ausdruck $a + bx + cx^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandelt, planmäßig zu fördern, kann man für x in diesem Ausdrucke successive kleine ganze Zahlen, wie 1, 2, 3, ꝛc., substituiren. Da jedoch x in vielen Fällen nur gebrochene Werthe haben kann, so ist es noch zweckmäßiger, den Ausdruck $a + bx + cx^2$ durch die Substitution von $x = \frac{v}{w}$ in den Ausdruck $\frac{aw^2 + bvw + cv^2}{w^2}$ zu verwandeln, und hierauf im Zähler dieses Ausdruckes für w und v successive kleine ganze Zahlen, wie 1, 2, 3, ꝛc., zu substituiren; man erkennt nämlich leicht, daß zwei ganze Zahlen v, w, welche den Ausdruck $aw^2 + bvw + cv^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, eine ganze, oder gebrochene Zahl für $x = \frac{v}{w}$ abgeben, welche den Ausdruck $a + bx + cx^2$ gleichfalls in ein vollkommenes Quadrat verwandelt.

Beispiel 1. Den Ausdruck $\sqrt{2 + 7x^2}$ rational zu machen.

1) Man findet sogleich, daß $x = 1$ den Ausdruck $2 + 7x^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandelt.

2) Beliebig viele andere Werthe von x, welche den Ausdruck $\sqrt{2 + 7x^2}$ rational machen, erhält man hierauf nach §. 32, wo dieses Beispiel bereits behandelt worden ist.

Beispiel 2. Den Ausdruck $\sqrt{11 + 3x + 2x^2}$ rational zu machen.

1) Man findet sogleich, daß $x = 1$ den Ausdruck $11 + 3x + 2x^2$ in ein vollkommenes Quadrat verwandelt.

2) Beliebig viele andere Werthe von x, welche den Ausdruck $\sqrt{11 + 3x + 2x^2}$ rational machen, erhält man hierauf nach §. 32, wo dieses Beispiel bereits behandelt worden ist.

Anmerkung. Kann der Ausdruck $\sqrt{a + bx + cx^2}$ nach keiner der vorhergehenden Auflösungsweisen rational gemacht werden,

so ist es sehr wahrscheinlich, daß sich dieser Ausdruck gar nicht zur Rationalität bringen läßt *.

---

* 1. Wir entnehmen aus Legendre's Théorie des nombres folgende historische Notizen über die unbestimmte Analytik und die damit eng zusammenhängende Theorie der Zahlen:

Nach verschiedenen Bruchstücken zu urtheilen, welche auf uns gekommen sind, und von welchen sich einige im Euklid vorfinden, scheint es, daß die alten Philosophen ziemlich ausgedehnte Nachforschungen über die Eigenschaften der Zahlen angestellt haben. Es fehlten ihnen jedoch zwei Mittel zur Ergründung dieser Wissenschaft: die Kunst des Numerirens, welche dazu dient, die Zahlen mit großer Leichtigkeit auszudrücken, und die Algebra, welche die Resultate verallgemeinert und ihre Operationen auf bekannte und unbekannte Größen ausdehnen kann. Die Erfindung dieser beiden Künste mußte daher das Vorwärtsschreiten in der Wissenschaft der Zahlen ungemein fördern. Auch sieht man, daß das Werk von Diophantus aus Alexandrien, welcher, so viel man weiß, zuerst über Algebra geschrieben hat, durchaus den Zahlen gewidmet ist, und schwierige Aufgaben enthält, welche mit großer Geschicklichkeit und vielem Scharfsinne aufgelöst sind.

Von Diophantus an bis auf Viète und Bachet (welche beide dem 16ten Jahrhundert angehören) beschäftigten sich die Mathematiker fortwährend mit den Zahlen, jedoch mit geringerem Erfolge und ohne die Wissenschaft viel zu fördern. Viète vervollkommnete die Algebra und löste mehrere schwierige Probleme über Zahlen auf. Bachet gab in seinem Werke Problèmes plaisans et délectables eine allgemeine und sehr geistreiche Methode für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades. Auch verdankt man ihm einen ausgezeichneten Commentar über die Schriften von Diophantus, welcher später von Fermat mit Randbemerkungen bereichert wurde.

Fermat (geboren zu Toulouse um das Jahr 1595, gestorben 1665), einer von den Geometern, deren Arbeiten am meisten dazu beigetragen haben, die Erfindung neuer Rechnungsarten zu beschleunigen, bildete mit großem Erfolge die Wissenschaft der Zahlen aus, und schlug dabei neue Wege ein. Man hat von ihm eine große Anzahl interessanter Theoreme, welche er indessen beinahe alle ohne Beweise gelassen hat. Es war damals allgemeine Sitte, sich gegenseitig Aufgaben zu geben. Man verbarg sehr häufig seine eigene Methode, um dadurch sowohl sich selbst als seiner Nation neue Triumphe vorzubehalten; denn es herrschte zu dieser Zeit namentlich eine große Eifersucht zwischen den französischen und englischen Geometern. Daher kam es auch, daß die meisten Beweise von Fermat verloren gegangen sind; und die wenigen derselben, welche uns erhalten wurden, lassen uns die fehlenden um so mehr bedauern.

Von Fermat an bis auf Euler legten sich die Geometer ausschließlich auf die Erfindung und Anwendung neuer Rechnungsarten, und beschäftigten sich nicht mit der Theorie der Zahlen. Euler (geboren zu Basel 1707,

gestorben zu Petersburg 1783), war der Erste, der sich wieder diesem Theile widmete; die zahlreichen Memoiren, welche er hierüber in den Commentaren von Petersburg, sowie in andern Werken herausgab, beweisen, wie sehr es ihm am Herzen lag, in der Wissenschaft der Zahlen dieselben Fortschritte zu machen, welche man ihm in den meisten andern Theilen der Mathematik schon zu danken hatte. Es ist wohl anzunehmen, daß Euler an solchen Nachforschungen einen besondern Geschmack fand, und sich denselben leidenschaftlich hingab, wie dieß beinahe Jedermann so ergeht, der sich damit beschäftigt. Wie dem auch sey, seinen gelehrten Forschungen gelang es, zwei der wichtigsten Lehrsätze von Fermat zu beweisen, nämlich: 1) wenn a eine Primzahl und x irgend eine durch a nicht theilbare Zahl ist, so muß x^{a-1} stets durch a theilbar seyn; 2) jede Primzahl von der Form $4n + 1$ ist die Summe zweier Quadrate.

Eine Menge anderer wichtiger Entdeckungen sind in den Memoiren von Euler enthalten. Man findet dort die Theorie der Divisoren des Ausdruckes $a^n \pm b^n$, die Abhandlung de Partitione numerorum, welche auch in seine Introd. in Anal. infinit. aufgenommen wurde; der Gebrauch der imaginären und irrationalen Factoren bei der Auflösung der unbestimmten Gleichungen; die allgemeine Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades, wenn eine einzige Auflösung derselben bekannt ist; die Beweise sehr vieler Lehrsätze über die Potenzen der Zahlen, und namentlich auch folgender zwei Lehrsätze von Fermat: 1) die Summe, oder Differenz zweier Cuben kann kein Cubus seyn, 2) die Summe, oder Differenz zweier Biquadrate kann kein Quadrat seyn. Endlich findet sich dort eine große Menge unbestimmter Aufgaben durch sehr scharfsinnige analytische Kunstgriffe aufgelöst.

Euler war lange Zeit beinahe der einzige Geometer, der sich mit der Theorie der Zahlen beschäftigte, bis ihm endlich Lagrange (geboren zu Turin 1736, gestorben zu Paris 1813) auf diesem Wege folgte, dessen erstes Auftreten sich durch Erfolge auszeichnete, welche denen gleich kamen, die er durch seine Nachforschungen in einem noch höhern Gebiete bereits errungen hatte. In einer allgemeinen Methode für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades, und was noch schwieriger war, einer Methode für die Auflösung derselben in ganzen Zahlen, bestand das Probestück dieses berühmten Gelehrten; bald nachher wandte er die Kettenbrüche auf diesen Zweig der Analysis an; er war der Erste, welcher nachwies, daß der Kettenbruch, welcher gleich der Wurzel einer rationalen Gleichung des zweiten Grades ist, periodisch seyn muß, und schloß hieraus, daß das Problem von Fermat, die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ betreffend, stets auflösbar sey, eine Behauptung, welche bis dahin noch nicht auf eine strenge Weise aufgestellt worden war, obgleich schon mehrere Geometer Methoden für die Auflösung dieser Gleichung gegeben hatten.

Derselbe Gelehrte hat durch später angestellte Nachforschungen, welche in den Memoiren von Berlin niedergelegt sind, zuerst bewiesen, daß jede ganze Zahl gleich der Summe von vier Quadraten ist; man verdankt ihm

gleichfalls mehrere andere wichtige Beweise; die merkwürdigste seiner Entdeckungen ist aber eine allgemeine Methode, aus der sich als Zusätze eine unendliche Anzahl von Lehrsätzen über die Primzahlen ergeben.

Diese seltsam fruchtbare Methode gründet sich auf die Betrachtung sowohl der quadratischen als linearen Formen der Divisoren des Ausdruckes $t^2 + au^2$, wo t und u zwei Unbestimmte bezeichnen, und a irgend eine gegebene Zahl ist.

Es blieb indessen noch übrig, die Relation, welche zwischen den linearen und quadratischen Formen auf die Primzahlen angewandt, auf eine allgemeine Weise festzustellen; denn in Ermangelung des Princips, welches diese Relation enthält, verschafft die Theorie von Lagrange zwar eine unendliche Anzahl von Lehrsätzen über die Primzahlen $4n + 3$, dagegen nur eine sehr kleine Anzahl über die Primzahlen $4n + 1$.

Ein Memoir von Legendre (geboren zu Paris 1752, gestorben 1833), welches in dem Bande der Academie der Wissenschaften fürs Jahr 1785 erschienen ist, liefert die Mittel, dieses Princip nachzuweisen, und bereichert überdieß die Wissenschaft der Zahlen um mehrere Sätze. Dasselbe enthält 1) den Beweis eines Lehrsatzes, nach welchem die Möglichkeit, oder Unmöglichkeit jeder unbestimmten Gleichung des zweiten Grades bestimmt werden kann, sobald sie auf die Form $ax^2 + by^2 = cz^2$ gebracht ist; 2) den Beweis des Satzes der Reciprocität, welcher ein allgemeines Gesetz zwischen zwei beliebigen Primzahlen ausspricht; 3) die Anwendung dieses allgemeinen Gesetzes auf verschiedene Sätze und seinen Gebrauch, sowohl die Theorie von Lagrange zu vervollkommnen, als auch andere Schwierigkeiten dieser Art zu überwinden.

Dieses Memoir enthält ferner den Entwurf einer ganz neuen Theorie der Zahlen, insofern sie als in drei Quadrate zerlegbar betrachtet werden; eine Theorie, welcher das berühmte Theorem von Fermat angehört, nach welchem jede Zahl eine Summe von drei Dreieckszahlen ist, sowie auch der Lehrsatz von Fermat, daß jede Primzahl $8n+7$ von der Form $p^2 + q^2 + 2r^2$ ist.

In der neuesten Zeit hat Legendre durch seine Théorie des nombres, Gauss durch seine Disquisitiones arithmeticae verschiedene Zweige der unbestimmten Analytik und der Theorie der Zahlen sehr vervollkommnet und bereichert.

2. Legendre spricht sich in seiner Théorie des nombres über den engen Zusammenhang der unbestimmten Analytik mit der Theorie der Zahlen auf folgende Weise aus: „Ich trenne die Theorie der Zahlen nicht von der unbestimmten Analytik, sondern betrachte diese beiden Theile als einen und denselben Zweig der algebraischen Analysis. In der That, es gibt keinen Lehrsatz über die Zahlen, welcher nicht auf die Auflösung einer, oder mehrerer unbestimmten Gleichungen Bezug hätte. Denn z. B. nach Fermat behaupten, jede Primzahl $4n + 1$ sey die Summe zweier Quadrate, heißt ebensoviel, als aussprechen, die Gleichung $A = y^2 + z^2$ sey stets auflösbar, so lange A eine Primzahl von der Form $4n + 1$ bezeichnet.“

Dritte Abhandlung.

Die combinatorischen Grundoperationen.

Syntaktik oder Combinationslehre.

§. 34.

Ordnet man gegebene Dinge oder Elemente auf jede mögliche Weise, so nennt man diese Operation Permutiren und die Zusammenstellungen Permutationen oder Permutationsformen. Alle Permutationen aus gewissen Elementen enthalten demnach einerlei Elemente, aber in verschiedner Ordnung.

§. 35.

Bildet man aus gegebenen Dingen oder Elementen alle nur mögliche Producte, so nennt man diese Operation Combiniren und die verschiedenen Zusammenstellungen Combinationen oder Combinationsformen.

§. 36.

Stellt man gegebene Dinge oder Elemente sowohl in Beziehung auf ihre Anzahl, als auch in Beziehung auf ihre Aufeinanderfolge so oft als möglich auf verschiedene Weise zusammen, so nennt man diese Operation variren und die verschiedenen Zusammenstellungen Variationen oder Variationsformen. Die Variationen sind demnach Combinationen mit Permutationen in Verbindung.

§. 37.

Beim Permutiren sind die gegebenen Elemente nicht immer sämmtlich von einander verschieden, sondern es kann ein Element, oder es können mehrere Elemente auch mehrfach vorkommen.

Ebenso sind bei den Combinationen und Variationen die Elemente in den zu bildenden Formen oder Complexionen nicht immer sämmtlich von einander verschieden, sondern es kann die Wiederholung der Elemente gestattet werden, d. h. es kann in einer Union (Complexion von einem Elemente) ein Element einmal, in einer Ambe oder Binion (Complexion von zwei Elementen) ein Element zwei-, oder einmal, in einer Terne oder Ternion (Complexion von drei Elementen) ein Element drei-, zwei-, oder einmal, in einer Quaterne oder Quaternion (Complexion von vier Elementen) ein Element vier-, drei-, zwei-, oder einmal, in einer Quine oder Quinion (Complexion von fünf Elementen) ein Element fünf-, vier-, drei-, zwei-, oder einmal, ꝛc. vorkommen. Es gibt daher sowohl Combinationen und Variationen ohne Wiederholungen, als auch Combinationen und Variationen mit Wiederholungen der Elemente.

§. 38.

Das Permutiren, Combiniren und Variren bilden die Grundoperationen der Syntaktik oder Combinationslehre im weitern Sinne, worunter man die vollständige Lehre von der Zahl und Form bei Zusammenstellungen von Dingen versteht.

Wir werden nun die wichtigsten Aufgaben aus der Syntaktik folgen lassen und auflösen.

Permutationen.

§. 39.

Aufgabe. Die Anzahl der Permutationsformen für n verschiedene Elemente zu bestimmen.

Auflösung. Ein Element läßt sich nur einmal nehmen. Für zwei Elemente gibt es 1×2 verschiedene Permutationsformen, indem man hinter jedes Element das andere Element setzen kann.

Betrachten wir z. B. die Elemente a, b, so erhält man auf diese Weise ab, ba.

Bei drei Elementen kann man hinter jedes Element die 1×2 verschiedene Verbindungen stellen, welche sich aus den zwei andern Elementen bilden lassen, und man erhält daher $1 \times 2 \times 3$ verschiedene Permutationsformen.

Betrachten wir z. B. die Elemente a, b, c, so erhalten wir auf diese Weise

abc, acb | bac, bca | cab, cba.

Bei vier Elementen kann man hinter jedes Element die $1 \times 2 \times 3$ verschiedene Verbindungen stellen, welche sich aus den drei andern Elementen bilden lassen, und man erhält daher $1 \times 2 \times 3 \times 4$ verschiedene Permutationsformen.

Betrachten wir z. B. die Elemente a, b, c und d, so erhalten wir auf diese Weise

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb |
bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca |
cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba |
dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.

Ein gleiches Raisonnement folgert $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ verschiedene Permutationsformen für fünf verschiedene Elemente, so wie überhaupt $1 \times 2 \times 3 \ldots . \times n$ verschiedene Permutationsformen für n verschiedene Elemente.

§. 40.

Aufgabe. Die Anzahl der Permutationsformen für n Elemente zu finden, wenn die Elemente nicht durchaus verschieden sind, sondern ein Element m mal vorkommt.

Auflösung. Gesetzt, wir haben die n Elemente a, a, a, b, c,..., und es bezeichne x die Anzahl aller verschiedenen Permutationsformen, welche sich aus diesen n Elementen, unter welchen a dreimal vorkommt, bilden lassen; so werden z. B. aaabc...., aabac... zwei von diesen Permutationsformen darstellen. Denken wir uns nun für die gleichen Elemente a, a, a die verschiedenen Elemente a', a'', a''' substituirt, so wird in den zwei angeführten Permutationsformen die Aufeinanderfolge der Elemente $a' a'' a''' bc\ldots$ und $a' a'' ba''' c\ldots$ seyn. Permutiren wir hierauf die Elemente a', a'', a''' so oft als möglich unter sich, wodurch wir $1 \times 2 \times 3$ verschiedene Aufeinanderfolgen dieser Elemente erhalten, und substituiren die Elemente a', a'', a''' unter diesen verschiedenen Aufeinanderfolgen in jeder der x Permutationsformen, ohne die Aufeinanderfolge der übrigen $n - 3$ Elemente b, c,... im mindesten zu ändern, so entstehen aus jeder Permutationsform $1 \times 2 \times 3$ verschiedene Verbindungen,

und also aus den x Permutationsformen $1 \times 2 \times 3 \times x$ verschiedene Verbindungen. Diese $1 \times 2 \times 3 \times x$ Permutationsformen enthalten nun offenbar alle nur möglichen Permutationen aus den n verschiedenen Elementen, welche sie in sich schließen, indem nach dem Vorhergehenden jede nur mögliche Verbindung aus den $n - 3$ verschiedenen Elementen b, c, ... mit jeder nur möglichen Verbindung aus den drei Elementen a', a'', a''' permutirt vorkommt. Da aber die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen, welche sich aus n verschiedenen Elementen bilden lassen, auch $= 1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots \times n$ ist (§. 39), so muß $1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots \times n = 1 \times 2 \times 3 \times x$ seyn, woraus wir für die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen aus n Elementen, worunter ein Element dreimal vorkommt,

$$x = \frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{1 . 2 . 3}$$ erhalten.

Ein gleiches Raisonnement entwickelt die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen aus n Elementen, worunter ein Element viermal vorkommt,

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{1 . 2 . 3 . 4},$$

sowie überhaupt die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen aus n Elementen, worunter ein Element m mal vorkommt,

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{1 . 2 . 3 \ldots m}.$$

§. 41.

Zusatz. Wenn unter n Elementen das eine m mal, ein zweites p mal und ein drittes q mal vorkommt, so ist die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen, welche sich aus diesen n Elementen bilden lassen,

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots . m \times 1 . 2 . 3 \ldots p \times 1 . 2 . 3 \ldots . q}.$$

Denn man setze die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen, welche sich aus den n Elementen (worunter das eine m mal, ein zweites p mal, ein drittes q mal vorkommt) bilden lassen, $= x$, und denke sich in den x Permutationsformen anstatt der m gleichen Elemente m verschiedene substituirt und so oft als möglich permutirt, so gehen die x Permutationsformen in $1 . 2 . 3 \ldots . m . x$ verschiedene Verbindungen über.

Man denke sich ferner in den $1 . 2 . 3 \ldots . m . x$ Permutationsformen anstatt der p gleichen Elemente p verschiedene substituirt und so oft als möglich permutirt, so gehen die $1 . 2 . 3 \ldots . m . x$ Permutationsformen in $1 . 2 . 3 \ldots p \times 1 . 2 . 3 \ldots . m . x$ verschiedene Verbindungen über.

Man denke sich endlich in den $1 . 2 . 3 \ldots . p \times 1 . 2 . 3 \ldots m \times x$ Permutationsformen anstatt der q gleichen Elemente q verschiedene substituirt und so oft als möglich permutirt, so gehen die $1 . 2 . 3 \ldots p \times 1 . 2 . 3 \ldots m \times x$ Permutationsformen in $1 . 2 . 3 \ldots q \times 1 . 2 . 3 \ldots p \times 1 . 2 . 3 \ldots m \times x$ Verbindungen über.

Da nun die Anzahl der aus n verschiedenen Elementen gebildeten Permutationsformen auch $= 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$ ist (§. 39), so muß

$$1 . 2 . 3 \ldots q \times 1 . 2 . 3 \ldots p \times 1 . 2 . 3 \ldots m . x = 1 . 2 . 3 \ldots n$$

seyn, woraus

$$x = \frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{1 . 2 . 3 \ldots q \times 1 . 2 . 3 \ldots p \times 1 . 2 . 3 \ldots m}.$$

§. 42.

Heißen wir die erste Complexion, welche gegebene Elemente in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge enthält, niedrigste Form; zählen ferner die Elemente von der Linken zur Rechten, und heißen die Stellen weiter rechts spätere Stellen, die Elemente weiter rechts niedrigere Elemente und die Elemente weiter links höhere Elemente, so wie endlich das Versetzen der Elemente von der Rechten zur Linken eine Erhöhung derselben, so läßt sich für die vollständige Bildung aller Permutationsformen gegebener Elemente folgendes allgemeines Gesetz aufstellen:

Aus der niedrigsten Complexion erzeugen sich dadurch allmälig alle höheren Complexionen, daß man stets die späteste Stelle, welche eine Erhöhung zuläßt, um so wenig als möglich erhöhet, für die übrigen Stellen aber die natürliche Folge der Elemente beibehält.

Wir wollen dieses Bildungsgesetz an einigen Beispielen zur Anwendung bringen und hiebei die Permutationsformen, der leichteren Uebersicht wegen, nach den Anfangsbuchstaben in Ordnungen aufstellen.

Beispiel 1. Für die Elemente a, b, c ist die Anzahl der Permutationen $= 1 \times 2 \times 3 = 6$, und sind die Permutationsformen:

I. abc, acb; II. bac, bca; III. cab, cba.

Beispiel 2. Für die Elemente a, b, c, d ist die Anzahl der Permutationen $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, und sind die Permutationsformen:

I. abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb;
II. bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca;
III. cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba;
IV. dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.

Beispiel 3. Für die Elemente a, a, b, b ist die Anzahl der Permutationen $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2} = 6$, und sind die Permutationsformen:

I. aabb, abab, abba; II. baab, baba, bbaa.

Beispiel 4. Für die Elemente a, b, b, c ist die Anzahl der Permutationen $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$, und sind die Permutationsformen:

I. abbc, abcb, acbb; II. babc, bacb, bbac, bbca, bcab, bcba; III. cabb, cbab, cbba.

Combinationen.

§. 43.

Aufgabe. Die Anzahl der Combinationsformen ohne Wiederholungen für n Elemente zur mten Classe zu finden.

Auflösung. Es versteht sich von selbst, daß die Anzahl der Unionen $= n$ ist. Um die Combinationen zur zweiten Classe zu bilden, kann man hinter jedes Element successive jedes der $n-1$ übrigen Elemente stellen, wodurch $n(n-1)$ Amben entstehen. Jede derselben kommt aber doppelt vor, z. B. die Ambe, welche die Elemente a, b enthält, als ab und ba, die Ambe, welche die Elemente c, d enthält, als cd und dc, rc.; so, daß sich also die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen aus n Elementen zur zweiten Classe auf $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ reducirt.

Für die Bildung der Combinationen zur dritten Classe setze man hinter jede der wirklich verschiedenen Amben jedes der übrigen n—2 Elemente, wodurch $\frac{n(n-1)}{1.2} \times (n-2)$ Ternen entstehen. Jede derselben kommt aber dreimal vor, da z. B. die Terne, welche die Elemente a, b, c enthält, aus ab mit c, aus ac mit b, aus bc mit a entstanden ist; so, daß sich also die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen aus n Elementen zur dritten Classe auf $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ reducirt.

Ein gleiches Raisonnement folgert $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ für die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen aus n Elementen zur vierten Classe, sowie überhaupt

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1.2.3\ldots.m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots.m}$$

für die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen aus n Elementen zur mten Classe.

§. 44.

Aufgabe. Die Anzahl der Combinationsformen mit Wiederholungen für n Elemente zur mten Classe zu finden.

Auflösung. Die Anzahl der Unionen ist = n. Verbindet man nun jede Union mit allen Elementen, so erhält man n $\times$ n Amben, worunter sich die aus verschiedenen Elementen doppelt und die aus gleichen Elementen einmal vorfinden. Damit jedoch die Amben aus gleichen Elementen auch doppelt vorkommen, verbinde man nicht nur, wie vorhin geschehen ist, jede Union mit allen Elementen, sondern jede Union noch überdieß einmal mit sich selbst. Auf diese Weise entstehen aus jeder Union n+1 Amben, und folglich aus den n Unionen n(n+1) Amben, welche sämmtlich doppelt vorkommen; so, daß sich also die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen zur zweiten Classe auf $\frac{n(n+1)}{1.2}$ reducirt.

Gesetzt, wir haben es z. B. mit den Elementen a, b, c zu thun, so erhalten wir nach dem ersten Theile des aufgestellten Verfahrens die Amben:

aa, ab, ac | ba, bb, bc | ca, cb, cc,

worunter sich die aus verschiedenen Elementen doppelt und die aus gleichen Elementen einmal vorfinden; ferner nach dem zweiten Theile des aufgestellten Verfahrens die weiteren Amben:

aa, bb, cc,

wodurch sich nunmehr alle Amben doppelt vorfinden, 2c.

Verbindet man hierauf die sämmtlichen verschiedenen Amben wieder mit allen Elementen, so entstehen $\frac{n(n+1)}{1 \, . \, 2} \times n$ Ternen, unter welchen die aus lauter verschiedenen Elementen dreimal, die mit zwei gleichen Elementen zweimal und die aus drei gleichen Elementen einmal vorkommen. Damit jedoch alle diese Ternen dreimal vorkommen, verbinde man nicht nur, wie vorhin geschehen ist, jede der verschiedenen Amben mit allen Elementen, sondern noch überdieß mit den in ihr selbst enthaltenen Elementen. Auf diese Weise entstehen aus jeder Ambe $n+2$ Ternen und folglich aus den $\frac{n(n+1)}{1 \, . \, 2}$ Amben $\frac{n(n+1)}{1 \, . \, 2} \times (n+2)$ Ternen, worunter sich jede dreimal vorfindet; so, daß sich also die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen zur dritten Classe auf $\frac{n(n+1)\,(n+2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}$ reducirt.

Gesetzt, wir haben es z. B. mit den Elementen a, b, c zu thun, deren verschiedene Amben aa, ab, ac, bb, bc, cc oben gebildet worden sind, so erhalten wir nach dem ersten Theile des aufgestellten Verfahrens die Ternen:

aaa, aab, aac | aba, abb, abc |
aca, acb, acc | bba, bbb, bbc |
bca, bcb, bcc | cca, ccb, ccc,

worunter sich die mit drei verschiedenen Elementen dreimal, die mit zwei gleichen Elementen zweimal und die mit drei gleichen Elementen einmal vorfinden; ferner nach dem zweiten Theile des aufgestellten Verfahrens die weiteren Ternen:

aaa und aaa von der Ambe aa, aba und abb von der Ambe ab, aca und acc von der Ambe ac, bbb und bbb von der Ambe bb, bcb und bcc von der Ambe bc, ccc und ccc von der Ambe cc,

wodurch sich nunmehr alle Ternen dreimal vorfinden, 2c.

Ebenso findet man die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen aus n Elementen zur vierten Classe $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, sowie überhaupt die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen aus n Elementen zur mten Classe $= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m}$.

§. 45.

Für die vollständige Bildung allen Combinationsformen gegebener Elemente gilt das §. 42 aufgestellte allgemeine Gesetz, jedoch mit der wesentlichen Beschränkung, daß nie auf ein höheres Element ein niedrigeres folgen darf, wodurch, wie es seyn soll, die identischen Combinationsformen vermieden werden.

Beispiel 1. Für die Elemente a, b, c, d, e, f ist die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen zur dritten Classe $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$, und sind die Combinationsformen:

I. abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef; II. bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef; III. cde, cdf, cef; IV. def.

Beispiel 2. Für die Elemente a, b, c, d, e, f, g ist die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen zur vierten Classe $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$, und sind die Combinationsformen:

I. abcd, abce, abcf, abcg, abde, abdf, abdg, abef, abeg, abfg, acde, acdf, acdg, acef, aceg, acfg, adef, adeg, adfg, aefg; II. bcde, bcdf, bcdg, bcef, bceg, bcfg, bdef, bdeg, bdfg, befg; III. cdef, cdeg, cdfg, cefg; IV. defg.

Beispiel 3. Für die Elemente a, b, c, d ist die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen zur dritten Classe $= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$, und sind die Combinationsformen:

I. aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add; II. bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd; III. ccc, ccd, cdd; IV. ddd.

Beispiel 4. Für die Elemente a, b, c ist die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen zur vierten Classe $= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$, und sind die Combinationsformen:

I. aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aacc, abbb, abbc, abcc, accc; II. bbbb, bbbc, bbcc, bccc; III. cccc.

Variationen.

§. 46.

Aufgabe. Die Anzahl der Variationsformen ohne Wiederholungen für n Elemente zur mten Classe zu finden.

Auflösung. Da die Variationen nichts anderes sind, als Combinationen, in welchen die Elemente zugleich permutirt vorkommen (§. 36), so ist nach §. 43 und §. 39 die Anzahl der Variationsformen aus n Elementen

zur ersten Classe $= \frac{n}{1} \times 1 = n$,

zur zweiten Classe $= \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \times 1 \,.\, 2 = n(n-1)$,

zur dritten Classe $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = n(n-1)(n-2)$,

zur vierten Classe $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$

$= (n-1)(n-2)(n-3)$,

überhaupt zur mten Classe

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m} \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m$$

$$= (n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)\ *.$$

§. 47.

Aufgabe. Die Anzahl der Variationsformen mit Wiederholungen für n Elemente zur mten Classe zu finden.

---

* Folgende Sätze lassen sich nunmehr leicht beweisen:

1. Die Permutationen aus n verschiedenen Elementen sind einerlei mit den Variationen ohne Wiederholungen aus n Elementen zur nten Classe.

2. In den Unionen sind die Combinationen und Variationen einander gleich.

3. Für n Elemente ist die Anzahl der Combinationsformen ohne Wiederholungen zur mten Classe gleich der zur (n — m)ten Classe.

4. Jedes Product aus den in der natürlichen Zahlenreihe auf einander folgenden n Zahlen ist durch das Product aus den n ersten Zahlen theilbar.

Auflösung. Die Anzahl der Unionen ist $= n$. Verbindet man hierauf alle Unionen mit den sämmtlichen Elementen, so entstehen $n \times n = n^2$ Amben, und zwar so, daß die Elemente in jeder Ambe, wie es seyn soll, so oft als möglich permutirt vorkommen. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen für n Elemente zur zweiten Classe ist also $= n^2$.

Gesetzt, wir haben es z. B. mit den Elementen a, b, c zu thun, so erhalten wir nach dem aufgestellten Verfahren die Amben

aa, ab, ac | ba, bb, bc | ca, cb, cc,

worunter ab und ba, ac und ca, bc und cb vorkommen, 2c.

Verbinden wir ferner alle Amben wieder mit den sämmtlichen Elementen, so entstehen $n^2 \times n = n^3$ Ternen, und zwar so, daß die Elemente in jeder Terne, wie es seyn soll, so oft als möglich permutirt vorkommen. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen für n Elemente zur dritten Classe ist also $= n^3$.

Gesetzt, wir haben es z. B. mit den Elementen a, b, c zu thun, deren Amben oben gebildet worden sind, so erhalten wir nach dem aufgestellten Verfahren die Ternen

aaa, aab, aac | aba, abb, abc | aca, acb, acc |
baa, bab, bac | bba, bbb, bbc | bca, bcb, bcc |
caa, cab, cac | cba, cbb, cbc | cca, ccb, ccc,

worunter abc, acb, bac, bca, cab und cba vorkommen, 2c.

Ebenso findet man die Anzahl der Variationsformen mit Wiederholungen für n Elemente zur vierten Classe $= n^4$, sowie überhaupt zur mten Classe $= n^m$.

§. 48.

Die Variationen haben mit den Combinationen einerlei Bildungsgesetz, nur fällt für die Variationen der Zusatz weg, daß nie auf ein höheres Element ein niedrigeres folgen darf.

Beispiel 1. Für die Elemente a, b, c, d ist die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen zur dritten Classe $= 4 \times 3 \times 2 = 24$, und sind die Variationsformen:

I. abc, abd, acb, acd, adb, adc;
II. bac, bad, bca, bcd, bda, bdc;
III. cab, cad, cba, cbd, cda, cdb;
IV. dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

Beispiel 2. Für die Elemente a, b, c, d, e ist die Anzahl

der Variationen ohne Wiederholungen zur zweiten Classe $= 5 \times 4 = 20$, und sind die Variationsformen:
I. ab, ac, ad, ae; II. ba, bc, bd, be; III. ca, cb, cd, ce; IV. da, db, dc, de; V. ea, eb, ec, ed.

Beispiel 3. Für die Elemente a, b, c, d ist die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen zur dritten Classe $= 4^3 = 64$, und sind die Variationsformen:
I. aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, abd, aca, acb, acc, acd, ada, adb, adc, add; II. baa, bab, bac, bad, bba, bbb, bbc, bbd, bca, bcb, bcc, bcd, bda, bdb, bdc, bdd; III. caa, cab, cac, cad, cba, cbb, cbc, cbd, cca, ccb, ccc, ccd, cda, cdb, cdc, cdd; IV. daa, dab, dac, dad, dba, dbb, dbc, dbd, dca, dcb, dcc, dcd, dda, ddb, ddc, ddd.

Beispiel 4. Für die Elemente a, b, c, d, e, f ist die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen zur zweiten Classe $= 6^2 = 36$, und sind die Variationsformen:
I. aa, ab, ac, ad, ae, af; II. ba, bb, bc, bd, be, bf; III. ca, cb, cc, cd, ce, cf; IV. da, db, dc, dd, de, df; V. ea, eb, ec, ed, ee, ef; VI. fa, fb, fc, fd, fe, ff *.

---

* 1. Es kann sowohl bei den Combinationen als Variationen noch weiter gefordert werden, daß die zu bildenden Formen einer besondern Bedingung genügen: z. B., daß die Elemente — als Zahlen betrachtet — in allen Formen derselben Classe mit gleichen Differenzen, oder nach einem und demselben Verhältnisse fortschreiten, oder dieselbe Summe geben, ꝛc. Solche Combinationen und Variationen heißen alsdann bedingte Combinationen und Variationen, während die oben abgehandelten, im Gegensatze zu diesen, unbedingte Combinationen und Variationen genannt werden. Die bedingten Combinationen und Variationen finden jedoch nicht leicht eine Anwendung und aus diesem Grunde auch hier keine weitere Betrachtung.

2. Die Combinationslehre findet in der Arithmetik und Geometrie, den Naturwissenschaften und der Mechanik eine große und mannigfache Anwendung. Sie verschafft eine leichte und sichere Uebersicht über alle Fälle, in welchen es auf die Anordnung gegebener Größen nach Zahl und Form ankommt, lehrt diese Fälle planmäßig und vollständig aufsuchen und ihre Anzahl genau vorausbestimmen. Sie erleichtert die vollständige Zerlegung der Zahlen in ihre Summanden und Factoren, sowie die allseitige Verbindung einer gegebenen Anzahl Punkte, Linien und Winkel, ꝛc. Sie kann als die Basis der niedern Analysis angesehen werden, insofern sie den binonischen und polynonischen Lehrsatz und die Composition der Gleichungen begründen hilft. Sie ist unentbehrlich bei vielen naturwissenschaftlichen Betrachtungen

Angewandte Aufgaben nebst den Auflösungen.

§. 49.

a) Ueber Permutationen.

Aufgabe 1. Wie viele Complexionen gibt es unter den sämmtlichen Versetzungen von a b c d e f g, 1) welche mit a b anfangen? 2) welche mit a b c d anfangen? 3) worin die Buchstaben a, b, c, d zusammen bleiben und zwar in der Ordnung, wie sie hier aufeinander folgen? 4) worin die Buchstaben a, b, c, d zusammen bleiben, wenn auf ihre Ordnung nicht gesehen wird?

Auflösung. 1) Unter den sämmtlichen Versetzungen gibt es so viele Complexionen, welche mit a b anfangen, als die übrigen Buchstaben c, d, e, f, g verschiedene Permutationsformen liefern, d. i. $1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$.

2) Unter den sämmtlichen Versetzungen gibt es so viele Complexionen, welche mit a b c d anfangen, als die übrigen Buchstaben e, f, g verschiedene Permutationsformen liefern, d. i. $1 . 2 . 3 = 6$.

3) Sollen die Buchstaben a, b, c, d in den sämmtlichen Versetzungen zusammen bleiben und zwar in der Ordnung, wie sie hier auf einander folgen, so müssen sie als ein Element angesehen werden; die gesuchte Anzahl Complexionen ist daher gleich der Anzahl aller Permutationsformen, welche die vier Elemente (a b c d), e, f, g abgeben, d. i. $= 1 . 2 . 3 . 4 = 24$.

4) Sollen die Buchstaben a, b, c, d in den sämmtlichen Versetzungen zusammenbleiben, jedoch so, daß ihre Aufeinanderfolge beliebig ist, so darf man nur in den 3) erhaltenen 24 Permutationsformen die Buchstaben a, b, c, d noch so oft als möglich unter sich permutiren, wodurch aus jeder dieser Permutationsformen $1 . 2 . 3 . 4 = 24$ neue entstehen; es beläuft sich daher die gesuchte Anzahl Complexionen auf $24 \times 24 = 576$.

Aufgabe 2. Wie oft könnte man die acht Täkte des ersten Theiles eines Walzers in einer andern Ordnung spielen, wenn man immer mit dem ersten Takte anfängt und mit dem achten aufhört?

---

und Untersuchungen, z. B. bei der Betrachtung und Untersuchung der Mannigfaltigkeit der Krystallformen, der verschiedenen Verbindungen chemischer Elemente, ꝛc. Ihre schönste Anwendung aber findet die Combinationslehre in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung (siehe §. 63).

Auflösung. Die acht Täkte ließen sich so oftmal in einer andern Ordnung spielen, als die sechs übrigen Täkte Permutationsformen abgeben, d. i. $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720$mal.

Aufgabe 3. Wie oft kann sich eine Gesellschaft von sechs Damen und sechs Herren in verschiedener Ordnung zu Tische setzen, wenn immer auf eine Dame ein Herr folgen soll?

Auflösung. Denken wir uns die zwölf Plätze der Gesellschaft numerirt, so sind beim Besetzen derselben zwei Fälle möglich: entweder nehmen die Damen die sechs geraden Plätze und die Herren die sechs ungeraden Plätze, oder die Damen die sechs ungeraden Plätze und die Herren die sechs geraden Plätze ein. Im ersten Falle können sowohl die sechs Damen unter sich, als auch die sechs Herren unter sich, ihre Plätze $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720$mal wechseln, wodurch $720 \times 720 = 518400$ verschiedene Wechsel beim Besetzen aller Plätze entstehen. Auf dieselbe Weise ergeben sich im zweiten Falle $720 \times 720 = 518400$ verschiedene Wechsel beim Besetzen aller Plätze. Die Gesellschaft kann sich demnach $518400 \times 2 = 1036800$mal in verschiedener Ordnung zu Tische setzen, wenn immer auf eine Dame ein Herr folgen soll.

Aufgabe 4. Wie oft lassen sich die Buchstaben des Wortes imperium permutiren?

Auflösung. Die acht Buchstaben dieses Wortes enthalten zwei i und zwei m, und lassen sich daher $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2 \times 1.2} = 10080$ mal permutiren.

Aufgabe 5. Wie viele Complexionen gibt es unter den sämmtlichen Versetzungen von aaabbbbbcccc, 1) welche mit ccc anfangen? 2) welche mit aabbc anfangen? 3) worin a eine bestimmte Stelle, etwa die vierte, einnimmt?

Auflösung. 1) Unter den sämmtlichen Versetzungen gibt es so viele Complexionen, welche mit ccc anfangen, als die übrigen Buchstaben a, a, a, b, b, b, b, b, c verschiedene Permutationsformen liefern, d. i. $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3 \times 1.2.3.4.5} = 504.$

2) Unter den sämmtlichen Versetzungen gibt es so viele Complexionen, welche mit aabbc anfangen, als die übrigen Buchstaben a, b, b, b, c, c, c verschiedene Permutationsformen liefern, d. i. $\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3 \times 1.2.3} = 140.$

3) Unter den sämmtlichen Versetzungen gibt es so viele Complexionen, worin a eine bestimmte Stelle einnimmt, als die übrigen Buchstaben a, a, b, b, b, b, b, c, c, c, c verschiedene Permutationsformen liefern, d. i. $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}{1.2 \times 1.2.3.4.5 \times 1.2.3.4} = 6930.$

Aufgabe 6. Wie viel beträgt die Summe einer jeden Vertikalkolumne, wenn alle Versetzungen der Zifferncomplexion 2557789 unter einander gesetzt werden?

Auflösung. Die Summe aller Ziffern der Complexion 2557789 beträgt 43, folglich die Summe aller Ziffern der sämmtlichen Versetzungen dieser Complexion, deren es $\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2 \times 1.2} = 1260$ gibt, 1260 × 43. Werden nun die sämmtlichen Versetzungen dieser sieben Ziffern unter einander gesetzt, so kommt in eine Vertikalkolumne nur der siebente Theil der erhaltenen Summe, d. i. $\frac{1260.43}{7} = 7740$ *.

b) Ueber Combinationen.

Aufgabe 7. Aus einem Piketspiele von 32 Karten soll man 15 Blätter herausziehen. Auf wie viele gleich mögliche Arten können die gezogenen Karten zusammengesetzt seyn?

Auflösung. Die gezogenen Karten können auf so viele verschiedene Arten zusammengesetzt seyn, als 32 Elemente verschiedene Combinationsformen zur fünfzehnten Classe abgeben, d. i.

$$\frac{32.31.30 \ldots 18}{1.2.3 \ldots 15} = 565722720.$$

Aufgabe 8. Wie viele gerade Linien sind zwischen 10 Punkten möglich?

---

* Berechnet man die verschiedenen Versetzungen der 25 Buchstaben des deutschen Alphabets, so findet man nicht weniger als 1.2.3....25 = 15511210043330985984000000. Pollak bemerkt hiezu (in seiner Sammlung algebraischer Aufgaben): „Würde man auf jede Octavseite eines Druckbogens 50 Zeilen und in jede Zeile zwei solche Versetzungen drucken, so würden für sämmtliche Versetzungen 19389012554163 73248 Ballen Druckbögen nöthig seyn. Nimmt man ferner an, daß ein Druckbogen so groß als ein Pariser Quadratfuß sey, so würde man mit diesen Bögen mehr als sechs Millionen Kugeln von der Größe unserer Erde damit überdecken können!“ —

Auflösung. Von einem Punkte zum andern läßt sich stets eine, aber auch nur eine Gerade ziehen; es sind daher zwischen den 10 Punkten so viele Geraden möglich, als 10 Elemente verschiedene Combinationsformen zur zweiten Classe abgeben, d. i. $\frac{10 . 9}{1 . 2} = 45$.

Aufgabe 9. Wie viele sich durchkreuzende Diagonalen kann man in einem Polygon von 24 Seiten ziehen?

Auflösung. Zwischen den 24 Eckpunkten des gegebenen Polygons kann man nach der vorhergehenden Aufgabe $\frac{24 . 23}{1 . 2} = 276$ Geraden ziehen, welche aus den 24 Seiten und den sich durchkreuzenden Diagonalen des Polygons bestehen; es ist daher die gesuchte Anzahl der Diagonalen $= 276 - 24 = 252$.

Aufgabe 10. Auf wie viele Arten lassen sich 40 verschiedene Kugeln so in zwei Haufen abtheilen, daß der eine 33, der andere 7 Kugeln enthalte?

Auflösung. So oft man von 40 Kugeln 7 nimmt, so oft bleiben 33 übrig; die 40 Kugeln lassen sich daher so oft in zwei Haufen abtheilen, als 40 Elemente verschiedene Combinationsformen zur siebenten Classe abgeben, d. i. $\frac{40 . 39 . 38 . 37 . 36 . 35 . 34}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7} = 18643560$.

Aufgabe 11. Auf wie viele Arten können 21 verschiedene Kugeln in drei Haufen von 3, 7 und 11 Kugeln abgetheilt werden?

Auflösung. So oft man von 21 Kugeln 3 nimmt, so oft bleiben 18 übrig, und so oft man von 18 Kugeln 7 nimmt, so oft bleiben 11 übrig; die 21 Kugeln können daher auf so viele verschiedene Arten in drei Haufen abgetheilt werden, als die Combinationsformen aus 21 Elementen zur dritten Classe mit den Combinationsformen aus 18 Elementen zur siebenten Classe verschiedene Verbindungen abgeben, d. i.

$$\frac{21 . 20 . 19}{1 . 2 . 3} \times \frac{18 . 17 . 16 . 15 . 14 . 13 . 12}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7} = 42325920.$$

Aufgabe 12. Das Product abcd läßt sich auf drei Arten in kleinere Producte von je zwei Factoren zerfällen, nämlich in $ab \times cd$, $ac \times bd$, $ad \times bc$, das Product abcdef läßt 15 solche Zerfällungen zu, nämlich $ab \times cd \times ef$, $ab \times ce \times df$, $ab \times cf \times de$, 2c. Auf wie viele verschiedene Arten wird sich

das Product abcdefg..., wenn dasselbe 2n Factoren a, b, c, d, e, f, g,... enthält, in kleinere Producte von je zwei Factoren zerfällen lassen?

Auflösung. Permutirt man die 2n Factoren des gegebenen Productes so oft als möglich, so entstehen 1.2.3...n(n+1)(n+2)...2n Permutationsformen. Zerfällt man hierauf jede dieser Permutationsformen in n kleinere Producte von je zwei unmittelbar auf einander folgenden Factoren, so findet sich das gegebene Product auf 1.2.3...n(n+1)(n+2)...2n Arten in n kleinere Producte von je zwei Factoren aufgelöst. Es ist aber leicht einzusehen, daß die auf diese Weise erhaltenen Formen alle nur möglichen Zerfällungen eines Productes von 2n Factoren in n kleinere Producte von je zwei Factoren umfassen, und darum nicht sämmtlich der vorliegenden Aufgabe entsprechen, welche weder die Permutationen der kleineren Producte, noch die Permutationen der in denselben enthaltenen Factoren zuläßt. Diese Formen enthalten nämlich 1) die n kleineren Producte so oft als möglich unter sich permutirt, d. i. 1.2.3...n mal, daher die obige Anzahl durch 1.2.3...n dividirt werden muß; 2) je die zwei Factoren eines jeden der n kleineren Producte noch überdieß unter sich permutirt, weßhalb die obige Anzahl auch noch durch $1.2 \times 1.2 \times \ldots^{n}. = (1.2)^n$ dividirt werden muß. Nach dem Vorhergehenden reduciren sich daher die 1.2.3...n(n+1)(n+2)...2n Formen auf

$$\frac{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n \times (1.2)^n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(1.2)^n}$$ Formen, welche sowohl in Bezug auf die kleineren Producte, als auch in Bezug auf die in denselben enthaltenen Factoren sämmtlich von einander verschieden sind; also läßt sich das gegebene Product auf $\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(1.2)^n}$ verschiedene Arten in kleinere Producte von je zwei Factoren zerfällen.

Aufgabe 13. Auf wie viele verschiedene Arten läßt sich das aus mn Factoren a, b, c, d, e, f, g, ... zusammengesetzte Product abcdefg ... in kleinere Producte von je m Factoren zerfällen?

Auflösung. Permutirt man die mn Factoren des gegebenen Productes so oft als möglich, so entstehen aus demselben 1.2.3...n(n+1)(n+2)...mn Permutationsformen. Zerfällt man hierauf jede dieser Permutationsformen in n kleinere Producte von je m unmittelbar auf einander folgenden Factoren, so findet

sich das gegebene Product auf $1 . 2 . 3 \ldots n (n + 1) (n + 2) \ldots mn$ Arten in n kleinere Producte von je m Factoren aufgelöst. Es ist aber leicht einzusehen, daß die auf diese Weise erhaltenen Formen alle nur möglichen Zerfällungen eines Productes von mn Factoren in n kleinere Produkte von je m Faktoren umfassen, und darum nicht sämmtlich der vorliegenden Aufgabe entsprechen, welche weder die Permutationen der kleineren Producte, noch die Permutationen der in denselben enthaltenen Faktoren zuläßt. Diese Formen enthalten nämlich ihrer Entstehung gemäß 1) die n kleineren Producte so oft als möglich unter sich permutirt, d. i. $1 . 2 . 3 \ldots n$ mal, weßhalb die obige Anzahl durch $1 . 2 . 3 \ldots n$ dividirt werden muß; 2) je die m Factoren eines jeden der n kleineren Producte noch überdieß unter sich permutirt, weßhalb die obige Anzahl auch noch durch $1 . 2 . 3 \ldots m \times 1 . 2 . 3 \ldots m \times \ldots^{n} = (1 . 2 . 3 \ldots m)^n$ dividirt werden muß. Nach dem Vorhergehenden reduciren sich daher die $1 . 2 . 3 \ldots n (n + 1) (n + 2) \ldots mn$ Formen auf

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots n (n + 1) (n + 2) \ldots mn}{1 . 2 . 3 \ldots n \times (1 . 2 . 3 \ldots m)^n} = \frac{(n + 1) (n + 2) \ldots mn}{(1 . 2 . 3 \ldots m)^n}$$

Formen, welche sowohl in Bezug auf die kleineren Producte, als auch in Bezug auf die in denselben enthaltenen Factoren sämmtlich von einander verschieden sind; also läßt sich das gegebene Product auf $\frac{(n + 1) (n + 2) \ldots mn}{(1 . 3 . 3 \ldots m)^n}$ verschiedene Arten in kleinere Producte von je m Factoren zerfällen.

c) Ueber Variationen.

Aufgabe 14. Wie viele verschiedene Würfe können mit drei gewöhnlichen Würfeln gemacht werden?

Auflösung. Wirft man mit den Würfeln A, B, C, so kann jede der sechs Seiten des Würfels B mit jeder der sechs Seiten des Würfels A fallen, wornach also die Würfel A und B zusammen 6×6 verschiedene Verbindungen zu je zweien abgeben. Es kann ferner jede der sechs Seiten des Würfels C mit jeder der 36 Verbindungen der Würfel A und B fallen, wornach also die Würfel A, B, C zusammen $36 \times 6 = 216$ verschiedene Verbindungen zu je dreien abgeben. Mit drei Würfeln können demnach 216 verschiedene Würfe gemacht werden.

Aufgabe 15. Wie viele verschiedene Würfe können mit fünf

gewöhnlichen Würfeln gemacht werden, ohne daß gleiche Augen vorkommen?

Auflösung. Betrachtet man die Würfel A, B, C, D, E, so kann, wenn keine gleiche Seiten oder Augen fallen sollen, der Würfel B noch fünf Seiten zu jeder der sechs Seiten des Würfels A abgeben, wodurch $6 \times 5 = 30$ verschiedene Verbindungen zu je zweien entstehen; ferner der Würfel C noch vier Seiten zu jeder dieser 30 Verbindungen, wodurch $30 \times 4 = 120$ verschiedene Verbindungen zu je dreien entstehen; ferner der Würfel D noch drei Seiten zu jeder dieser 120 Verbindungen, wodurch $120 \times 3 = 360$ verschiedene Verbindungen zu je vieren entstehen; endlich der Würfel E noch zwei Seiten zu jeder dieser 360 Verbindungen, wodurch $360 \times 2 = 720$ verschiedene Verbindungen zu je fünfen entstehen. Mit fünf Würfeln können demnach 720 verschiedene Würfe gemacht werden, ohne daß gleiche Augen vorkommen.

Aufgabe 16. Wie viele dreizifferige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und zwar 1) ohne Wiederholungen, 2) mit Wiederholungen schreiben?

Auflösung. 1) Mit den gegebenen Ziffern lassen sich ohne Wiederholungen so viele verschiedene dreizifferige Zahlen schreiben, als sechs Elemente verschiedene Variationen ohne Wiederholungen zur dritten Classe abgeben, d. i. $6 . 5 . 4 = 120$.

2) Mit den gegebenen Ziffern lassen sich mit Wiederholungen so viele verschiedene dreizifferige Zahlen schreiben, als sechs Elemente verschiedene Variationen mit Wiederholungen zur dritten Classe abgeben, d. i. $6^3 = 216$.

Vierte Abhandlung.

Die Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Einfache oder absolute Wahrscheinlichkeit.

§. 50.

Unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit oder Probabilität eines Ereignisses versteht man das Verhältniß aus den Fällen, welche diesem Ereignisse günstig sind, zu allen Fällen, welche überhaupt eintreten können und gleich möglich sind.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses läßt sich diesem gemäß durch einen Bruch ausdrücken, der zum Zähler die Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle und zum Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle hat. Die Größe dieses Bruches bestimmt den Grad der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.

§. 51.

Kommt die Anzahl der günstigen Fälle der Anzahl aller möglichen Fälle gleich, oder mit andern Worten, gibt es für ein Ereigniß nur günstige Fälle, so ist das Eintreffen desselben gewiß, und der Bruch, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ausdrückt, wird = 1; die Einheit ist daher das Symbol der Gewißheit.

§. 52.

Wirft man z. B. mit zwei gewöhnlichen Würfeln A und B, von welchen bekanntlich jeder sechs mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 Augen versehene Seiten hat, so kann jede der sechs Seiten des Würfels B mit jeder der sechs Seiten des Würfels A zum Vorschein kommen, und es sind daher im Ganzen folgende 36 Fälle gleich möglich:

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Nach dieser Tabelle findet man sogleich

1) die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit dem Würfel A 2 und mit dem Würfel B 3 Augen zu werfen, wofür 1 günstiger Fall unter den 36 gleich möglichen Fällen vorkommt, $= \frac{1}{36}$;

2) die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit dem einen Würfel 2 und mit dem andern Würfel 3 Augen zu werfen, gleichviel, ob der Würfel A 2 und der Würfel B 3 Augen, oder der Würfel A 3 und der Würfel B 2 Augen zeigt, wofür 2 günstige Fälle unter den 36 gleich möglichen Fällen vorkommen, $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

3) die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit den Würfeln A und B gleiche Augen (11, 22, ... 66) zu werfen, wofür 6 günstige Fälle unter den 36 gleichmöglichen Fällen vorkommen, $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;

4) die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit den Würfeln A und B ungleiche Augen zu erhalten, wofür 30 günstige Fälle unter den 36 gleich möglichen Fällen vorkommen, $= \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$;

5) die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit den Würfeln A und B entweder gleiche, oder ungleiche Augen zu erhalten, wofür alle 36 gleich mögliche Fälle günstig sind, $= \frac{36}{36} = 1$.

§. 53.

Aus dem Erweitern und Reduciren der Brüche folgt, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses weder geschwächt, noch erhöhet wird, wenn man die Anzahl der günstigen Fälle und die aller gleich möglichen Fälle in gleichem Verhältnisse abnehmen, oder wachsen läßt.

Enthält z. B. die Urne A 2 weiße und 1 schwarze, die Urne B 4 weiße und 2 schwarze, die Urne C 6 weiße und 3 schwarze Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne A eine weiße, oder eine schwarze Kugel zu erhalten, ebenso groß, als die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne B eine weiße, oder eine schwarze Kugel

zu erhalten, und eben so groß, als die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne C eine weiße, oder eine schwarze Kugel zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel ist stets $= \frac{2}{3}$, die Wahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel stets $= \frac{1}{3}$.

Entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

§. 54.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß nicht eintreffe, heißt die **entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit** dieses Ereignisses und besteht in dem Verhältnisse aus den Fällen, welche dem Ereignisse ungünstig, oder was damit einerlei ist, dem Nichteintreffen des Ereignisses günstig sind, zu den Fällen, welche überhaupt eintreten können und gleich möglich sind.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit läßt sich diesem gemäß durch einen Bruch ausdrücken, der zum Zähler die Anzahl der dem Ereignisse ungünstigen, oder dem Nichteintreffen des Ereignisses günstigen, Fälle und zum Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle hat.

§. 55.

Da es gewiß ist, daß ein Ereigniß entweder eintrifft, oder nicht eintrifft, so muß der Bruch, welcher die Wahrscheinlichkeit, $= w$, eines Ereignisses ausdrückt, mit dem Bruche, welcher die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, $= w'$, desselben Ereignisses ausdrückt, zusammen 1, das Symbol der Gewißheit, ausmachen; also $w + w' = 1$.

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$w' = 1 - w,$$

woraus erhellt, **daß man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit (w') eines Ereignisses findet, wenn man die Wahrscheinlichkeit (w) dieses Ereignisses von 1 subtrahirt.**

§. 56.

Beim Werfen mit zwei Würfeln A und B findet man z. B. nach der §. 52 aufgestellten Tabelle sogleich:

1) Die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit dem Würfel A 2 und mit dem Würfel B 3 Augen zu werfen, $= \frac{1}{36}$ (§. 52, 1); die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, mit

dem Würfel A 2 und mit dem Würfel B 3 Augen nicht zu werfen, wofür 35 günstige Fälle unter den 36 gleich möglichen vorkommen, $= \frac{35}{36}$. Auch ist $\frac{1}{36} + \frac{35}{36} = 1$.

2) Die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit dem einen Würfel 2 und mit dem andern Würfel 3 Augen zu werfen, gleichviel, ob der Würfel A 2 und der Würfel B 3, oder der Würfel A 3 und der Würfel B 2 Augen zeigt, $= \frac{1}{18}$ (§. 52, 2); die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, mit dem einen Würfel 2 und dem andern Würfel 3 Augen nicht zu werfen, wofür 34 günstige Fälle unter den 36 gleich möglichen Fällen vorkommen, $= \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$. Auch ist $\frac{1}{18} + \frac{17}{18} = 1$.

3) Die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit den Würfeln A und B gleiche Augen zu werfen, $= \frac{1}{6}$ (§. 52, 3); die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, mit den Würfeln A und B ungleiche Augen zu werfen, wofür 30 günstige Fälle unter den 36 gleich möglichen Fällen vorkommen, $= \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$. Auch ist $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$.

4) Die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit den Würfeln A und B ungleiche Augen zu werfen, $= \frac{5}{6}$ (§. 52, 4); die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, mit den Würfeln A und B gleiche Augen zu werfen, wofür 6 günstige Fälle unter den 36 gleich möglichen Fällen vorkommen, $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Auch ist $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

5) Die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf mit den Würfeln A und B entweder gleiche, oder ungleiche Augen zu werfen, $= 1$ (§. 52, 5); die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, mit den Würfeln A und B weder gleiche, noch ungleiche Augen zu werfen, wofür unter den 36 gleich möglichen Fällen gar kein günstiger Fall vorkommt, $= 0$. Auch ist $1 + 0 = 1$*.

---

* Ueber den Sinn der Wahrscheinlichkeits-Rechnung drückt sich Burg (in seinem Lehrbuche der höhern Mathematik) recht bezeichnend folgendermaßen aus:

„Ist die Wahrscheinlichkeit irgend eines Ereignisses $> \frac{1}{2}$, so hat dieses eine absolute Wahrscheinlichkeit für sich, und man sagt dann auch im gemeinen Leben schon, daß das Eintreffen desselben wahrscheinlich sey. In diesem Falle nämlich ist es wahrscheinlicher, daß das Ereigniß eintrifft, als daß es nicht, oder das Gegentheil eintritt. So wenig nun die Wahrscheinlichkeits-Rechnung für wenige, oder einzelne bestimmte Fälle den künftigen

Relative Wahrscheinlichkeit.

§. 57.

Die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse, von der wir §. 50 — §. 53 sprachen, wird eine *einfache* oder *absolute Wahrscheinlichkeit* genannt. Nun kann aber auch gesucht werden, wie wahrscheinlich es sey, daß ein gewisses Ereigniß eher, als ein anderes bestimmtes Ereigniß eintreffe, wobei alsdann alle Ereignisse außer diesen beiden von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben, und diese Wahrscheinlichkeit der Ereignisse heißt eine *relative Wahrscheinlichkeit*.

§. 58.

Soll z. B. bestimmt werden, wie wahrscheinlich es sey, mit zwei Würfeln auf einen Wurf eher die Summe 3, als die Summe 4 zu werfen, so kommen hier von den 36 Fällen, welche beim Werfen mit zwei Würfeln gleich möglich sind (siehe die Tabelle §. 52), nur diejenigen in Betrachtung, bei welchen die Summe aller Augen 3, oder 4 beträgt. Nun finden sich darunter 2 Fälle, bei welchen

---

Erfolg unfehlbar anzugeben vermag, so gewiß ist es, daß diejenigen im Vortheile sind, welche für das Eintreffen eines für sie günstigen Ereignisses eine, wenn auch noch so geringe absolute Wahrscheinlichkeit (d. i. eine Wahrscheinlichkeit $> \frac{1}{2}$) für sich haben und dabei die Handlung oder der Versuch, von welchen das Eintreffen oder Nichteintreffen dieses Ereignisses abhängt, sehr oft wiederholt wird; wie dieß der sichere Gewinn der Lotterien und Spielhäuser, deren Einrichtungen auf die Wahrscheinlichkeits-Rechnung gegründet sind, hinlänglich beweist. Befinden sich z. B. in einem Topfe 90 weiße und 10 schwarze Kugeln von übrigens ganz gleicher Beschaffenheit, so wird Niemand anstehen, dem Resultate des Probabilitäts-Calculs beizustimmen, nach welchem es wahrscheinlicher ist, daß man eine weiße, als eine schwarze Kugel ziehen wird. Der erste Fall hat nämlich die Wahrscheinlichkeit $= \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$, und der letztere nur die Wahrscheinlichkeit $= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ für sich, so, daß die erstere neunmal so groß, als die letztere ist. Obgleich aber dieses Ergebniß nicht so zu verstehen ist, als könnte man beim ersten, oder zweiten, oder dritten, u. s. w. Hineingreifen in den Topf nicht auch statt der weißen eine schwarze Kugel ziehen; so ist es doch ausgemacht, daß z. B. unter 100 Versuchen, höchst wahrscheinlich, öfter eine weiße, als eine schwarze Kugel gezogen werden wird. Dasselbe gilt auch dort, wo die absolute Wahrscheinlichkeit nicht so überwiegend, wie in diesem Beispiele ist; wenn nur überhaupt der Versuch oft genug wiederholt wird."

diese Summe 3, und 3 Fälle, bei welchen diese Summe 4 beträgt; es ist daher die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf eher die Summe 3, als die Summe 4 zu werfen, $= \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$, und die Wahrscheinlichkeit, eher die Summe 4, als die Summe 3 zu werfen, $= \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$.

Es ist ferner die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 3 zu werfen, $= \frac{2}{36}$, und die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 4 zu werfen, $= \frac{3}{36}$. Vergleicht man nun die absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse mit ihren relativen Wahrscheinlichkeiten, so ergibt sich, daß man die relative Wahrscheinlichkeit eines jeden Ereignisses findet, wenn man seine absolute Wahrscheinlichkeit durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse dividirt; denn auf diese Weise erhält man

$$\frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{36}+\frac{3}{36}} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$ für die Wahrscheinlichkeit, eher die Summe 3, als die Summe 4 zu werfen,

$$\frac{\frac{3}{36}}{\frac{2}{36}+\frac{3}{36}} = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$$ für die Wahrscheinlichkeit, eher die Summe 4, als die Summe 3 zu werfen.

Da es gewiß ist, daß man mit zwei Würfeln entweder eher die Summe 3, als die Summe 4, oder eher die Summe 4, als die Summe 3 wirft, so müssen die relativen Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse zusammen 1, das Symbol der Gewißheit ausmachen, was auch wirklich der Fall ist.

§. 59.

Nach den im vorhergehenden Beispiele für das Bestimmen der relativen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse gezeigten zwei Weisen findet man sofort leicht:

a) die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf

1) eher die Summe 6, als die Summe 12 zu werfen, $= \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$,

2) » » » 2, » » » 7 » » , $= \frac{1}{1+6} = \frac{1}{7}$;

b) die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in der sich 10 weiße, 12 schwarze, 15 rothe und 18 blaue Kugeln befinden,

1) eher eine weiße, als eine schwarze Kugel zu ziehen, $= \frac{10}{10+12} = \frac{5}{11}$,

2) eher eine rothe, als eine blaue Kugel zu ziehen, $= \frac{15}{15+18} = \frac{5}{11}$.

Zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit.

§. 60.

Nach der absoluten und relativen Wahrscheinlichkeit der Ereignisse haben wir noch mit einer andern Art von Wahrscheinlichkeit bekannt zu machen. Es kann nämlich die Frage entstehen, wie wahrscheinlich es sey, daß zwei, oder noch mehr Ereignisse, von welchen jedes seine besondere Wahrscheinlichkeit hat, unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen, und diese Wahrscheinlichkeit der Ereignisse heißt eine zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit.

§. 61.

Soll z. B. bestimmt werden, wie wahrscheinlich es sey, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf die Summe 5 und auf den zweiten Wurf die Summe 10 zu werfen, so bemerkt man, daß von den beim Werfen mit zwei Würfeln gleich möglichen 36 Fällen (siehe die Tabelle §. 52) dem ersten Ereignisse 4 Fälle günstig sind, und daher die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 5 zu werfen, $= \frac{4}{36}$ ist; ferner dem Eintreffen des zweiten Ereignisses 3 Fälle günstig sind, und daher die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 10 zu werfen, $= \frac{3}{36}$ ist. Da es nun beim zweimaligen Werfen mit zwei Würfeln gleich möglich ist, daß einerseits jeder der 3 günstigen Fälle des zweiten Ereignisses auf jeden der 4 günstigen Fälle des ersten

Ereignisses, sowie andererseits jeder der 36 möglichen Fälle des zweiten Wurfes auf jeden der 36 möglichen Fälle des ersten Wurfes folge, so gibt es für das in Frage stehende Zusammentreffen der beiden Ereignisse 3×4 günstige und 36×36 gleich mögliche Fälle, und es ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{3 . 4}{36 . 36} = \frac{1}{108}.$$

Es ist aber $\frac{3 . 4}{36 . 36} = \frac{3}{36} \times \frac{4}{36}$, woraus erhellt, daß man die Wahrscheinlichkeit des unmittelbaren Aufeinanderfolgens oder Zusammentreffens zweier Ereignisse findet, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse mit einander multiplicirt.

§. 62.

Ganz so folgert man, daß die zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit von mehr als zwei Ereignissen gleichfalls ein Product aus den absoluten Wahrscheinlichkeiten der sämmtlichen Ereignisse ist.

Um z. B. zu bestimmen, wie wahrscheinlich es sey, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf die Summe 6, auf den zweiten Wurf die Summe 7 und auf den dritten Wurf die Summe 8 zu werfen, bemerkt man, daß von den beim Werfen mit zwei Würfeln gleich möglichen 36 Würfen dem Eintreffen des ersten Ereignisses 5 Fälle günstig sind, und daher die absolute Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $= \frac{5}{36}$ ist, ferner dem Eintreffen des zweiten Ereignisses 6 Fälle günstig sind, und daher die absolute Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $= \frac{6}{36}$ ist, endlich dem Eintreffen des dritten Ereignisses 5 Fälle günstig sind, und daher die absolute Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $= \frac{5}{36}$ ist, woraus sich ergibt, daß für das in Frage stehende Zusammentreffen der drei Ereignisse $5 \times 6 \times 5$ günstige und $36 \times 36 \times 36$ gleich mögliche Fälle vorhanden sind, und also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{5 . 6 . 5}{36 . 36 . 36} = \frac{5}{36} \times \frac{6}{36} \times \frac{5}{36}$ $= \frac{25}{7776}$ beträgt.

Angewandte Aufgaben über die einfache oder absolute Wahrscheinlichkeit nebst den Auflösungen.

§. 63.

1) Sind bei einer Handlung oder einem Versuche a Fälle für das Eintreffen eines Ereignisses günstig und b Fälle ungünstig, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß eintreffe, $= \frac{a}{a+b}$ (§. 50); die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß nicht eintreffe, $= \frac{b}{a+b} = 1 - \frac{a}{a+b}$ (§. 54).

2) Erstreckt sich ferner eine Handlung oder ein Versuch über die Ereignisse A, B, C,.... auf eine solche Weise, daß jedenfalls eines derselben eintrifft, und sind a Fälle dem Ereignisse A, b Fälle dem Ereignisse B, c Fälle dem Ereignisse C,.... günstig, so ist, wenn wir Kürze halber $a + b + c + \ldots = s$ setzen, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $A = \frac{a}{s}$, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $B = \frac{b}{s}$, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $C = \frac{c}{s}, \ldots$

3) Bei derselben Voraussetzung ist endlich die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das Ereigniß A, oder das Ereigniß B eintreffe, wofür $a + b$ günstige Fälle vorhanden sind, $= \frac{a+b}{s} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s}$; die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das Ereigniß A, oder das Ereigniß C eintreffe, wofür $a + c$ günstige Fälle vorhanden sind, $= \frac{a+c}{s} = \frac{a}{s} + \frac{c}{s}$; die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das Ereigniß B, oder das Ereigniß C eintreffe, wofür $b + c$ günstige Fälle vorhanden sind, $= \frac{b+c}{s} = \frac{b}{s} + \frac{c}{s}$; die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das Ereigniß A, oder das Ereigniß B, oder das Ereigniß C eintreffe, wofür $a + b + c$ günstige Fälle vorhanden sind, $= \frac{a+b+c}{s} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s}$.

Setzt man überhaupt die Wahrscheinlichkeit, daß von mehreren solchen Ereignissen das erste eintreffe, $= w$, die Wahrscheinlichkeit, daß das zweite eintreffe, $= w_1$, die Wahrscheinlichkeit, daß das dritte eintreffe, $= w_2, \ldots$, so ist demnach die Wahrscheinlichkeit (welche man eine durch Addition zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit nennen könnte), daß entweder das erste, oder das zweite dieser Ereignisse eintrete, $= w + w_1$; die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das zweite, oder das dritte dieser Ereignisse eintrete, $= w_1 + w_2$; die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das erste, oder das dritte dieser Ereignisse eintrete, $= w + w_2$; die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das erste, oder das zweite, oder das dritte dieser Ereignisse eintrete, $= w + w_1 + w_2$.

Aufgabe 1. Unter wie vielen Würfen ist es beim Werfen mit vier Würfeln wahrscheinlich, daß einmal vier gleiche Augen fallen?

Auflösung. Beim Werfen mit vier Würfeln auf einen Wurf sind $6 \times 6 \times 6 \times 6$ verschiedene Fälle gleich möglich, worunter sich 6 Fälle mit vier gleichen Augen 1111, 2222, ... 6666 befinden; es ist daher die Wahrscheinlichkeit, mit vier Würfeln auf einen Wurf vier gleiche Augen zu werfen, $= \frac{6}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{216}$, woraus folgt, daß es beim Werfen mit vier Würfeln wahrscheinlich sey, unter 216 Würfen einmal vier gleiche Augen zu werfen.

Aufgabe 2. In einer Urne befinden sich 5 weiße und 4 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug drei weiße Kugeln zu ziehen?

Auflösung. Für das Ereigniß, 3 weiße Kugeln zu ziehen, geben die 5 weißen Kugeln $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ günstige und alle 9 Kugeln $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ gleich mögliche Fälle ab; daher die verlangte Wahrscheinlichkeit $\dfrac{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{5}{42}$ beträgt.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, keine 3 weißen Kugeln zu ziehen, ist $= 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$.

Aufgabe 3. Aus einer Urne, welche 8 weiße und 14 schwarze Kugeln enthält, werden auf einen Zug zehn Kugeln gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, daß sich unter den gezogenen Kugeln vier weiße und sechs schwarze befinden?

Auflösung. Für das Ereigniß, daß sich unter den 10 gezogenen Kugeln 4 weiße und 6 schwarze befinden, geben die 8 weißen und 14 schwarzen Kugeln $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \times \frac{14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6}$ günstige Fälle und alle 22 Kugeln $\frac{22.21.20.19.18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ gleich mögliche Fälle ab; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \times \frac{14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6}}{\frac{22.21.20.19.18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}} = \frac{105}{323} \text{ beträgt.}$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den 10 gezogenen Kugeln keine 4 weißen und 6 schwarzen Kugeln befinden, ist $= 1 - \frac{105}{323} = \frac{218}{323}$.

Aufgabe 4. Aus einem Piketspiele von 32 Karten werden acht Karten ausgegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) daß vier Bilder, b) daß der Kreuz- und Eckstein-König, c) daß überhaupt zwei Könige darunter sind?

Auflösung. a) Unter den 32 Karten befinden sich 12 Bilder, nämlich 3 von einer jeden der 4 Farben. Da nun die 8 ausgegebenen Karten 4 von den 12 Bildern und somit 4 von den 20 übrigen Karten enthalten sollen, so geben für dieses Ereigniß die 12 Bilder und die 20 übrigen Karten

$\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \times \frac{20.19.18.17}{1.2.3.4}$ günstige Fälle und alle 32 Karten $\frac{32.31.30.29.28.27.26.25}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ gleich mögliche Fälle ab; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}} = \frac{10659}{46748} \text{ oder ungefähr } \frac{2}{9}$$

beträgt.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß die 8 ausgegebenen Karten keine 4 Bilder enthalten, ist $= 1 - \frac{10659}{46748} = \frac{36089}{46748}$ oder ungefähr $\frac{7}{9}$.

b) Für das Ereigniß, daß die 8 ausgegebenen Karten zwei bezeichnete Karten, wie den Kreuz- und Eckstein-König enthalten, gibt es $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$ günstige und $\frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2}$ gleich mögliche Fälle; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}}{\frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2}} = \frac{7}{124}$ beträgt.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß die 8 ausgegebenen Karten den Kreuz- und Eckstein-König nicht enthalten, ist $= 1 - \frac{7}{124} = \frac{117}{124}$.

c) Unter den 32 Karten befinden sich 4 Könige, nämlich einer von jeder Farbe. Da nun die 8 ausgegebenen Karten 2 von den 4 Königen und somit 6 von den übrigen 28 Karten enthalten sollen, so geben für dieses Ereigniß die 4 Könige und die 28 übrigen Karten $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \times \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ günstige Fälle und alle 32 Karten $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ gleich mögliche Fälle ab; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \times \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}}{\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}} = \frac{966}{4495} \text{ oder ungefähr } \frac{2}{9}$$

beträgt.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß die 8 ausgegebenen Karten keine 2 Könige enthalten, ist $= 1 - \frac{966}{4495} = \frac{3529}{4495}$ oder ungefähr $\frac{7}{9}$.

Aufgabe 5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit fünf Würfeln auf einen Wurf gerade drei gleiche Augen und nicht mehr zu werfen, aber so, daß die übrigen Würfel ungleiche Augen haben? Wie groß ist sie ferner unter der nämlichen Bedingung für sechs und neun Würfel?

Auflösung. a) Mit fünf Würfeln können $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ verschiedene Würfe gemacht werden, worunter auch die Fälle begriffen sind, in welchen die fünf Würfel gerade drei gleiche Augen zeigen. Betrachten wir nun, um die Anzahl dieser Fälle zu bestimmen, die fünf Würfel A, B, C, D, E, welche $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ verschiedene Verbindungen zu je dreien abgeben, und lassen die Würfel A, B, C die drei gleichen Augen 111, 222, ... 666 zeigen, so kann der Würfel D zu jeder dieser 6 Verbindungen noch 5 verschiedene Augen abgeben, wodurch 6×5 verschiedene Verbindungen zu je vieren entstehen; ferner kann der Würfel E zu jeder dieser 6×5 Verbindungen noch 4 verschiedene Augen abgeben, wodurch $6 \times 5 \times 4$ verschiedene Verbindungen zu je fünfen entstehen; es beläuft sich demnach die Anzahl aller Fälle, in welchen die fünf Würfel gerade drei gleiche Augen zeigen können, auf $10 \times 6 \times 5 \times 4$, und die verlangte Wahrscheinlichkeit beträgt somit $\frac{10\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{6\,.\,6\,.\,6\,.\,6\,.\,6} = \frac{25}{162}$.

b) Mit sechs Würfeln können $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ verschiedene Würfe gemacht werden, worunter auch die Fälle begriffen sind, in welchen die sechs Würfel gerade drei gleiche Augen zeigen. Betrachten wir nun, um die Anzahl dieser Fälle zu bestimmen, die sechs Würfel A, B, C, D, E, F, welche $\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} = 20$ verschiedene Verbindungen zu je dreien abgeben, und lassen die Würfel A, B, C die drei gleichen Augen zeigen, so kann der Würfel D noch 5, der Würfel E noch 4 und der Würfel F noch 3 verschiedene Augen abgeben, wodurch $6 \times 5 \times 4 \times 3$ verschiedene Verbindungen zu je sechsen entstehen; es beläuft sich demnach die Anzahl aller Fälle, in welchen sechs Würfel gerade drei gleiche Augen zeigen können, auf $20 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit $\frac{20\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3}{6\,.\,6\,.\,6\,.\,6\,.\,6\,.\,6} = \frac{25}{162}$.

c) Betrachten wir, um die Anzahl der Fälle zu bestimmen, in welchen neun Würfel gerade drei gleiche Augen zeigen, die Würfel **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, und lassen die Würfel **A**, **B**, **C** die drei gleichen Augen zeigen, so kann der Würfel **D** noch 5, der Würfel **E** noch 4, der Würfel **F** noch 3, der Würfel **G** noch 2 verschiedene Augen, der Würfel **H** noch 1 und der Würfel **I** gar kein verschiedenes Auge mehr abgeben, woraus erhellt, daß es unmöglich ist, mit neun Würfeln gerade drei gleiche Augen zu werfen.

Aufgabe 6. In der französischen Zahlenlotterie (der **Loterie de France**, dem bekannten oder berüchtigten **Lotto di Genua**) werden von 90 Numern, welche man in ein Rad legt und vermittelst der Umdrehung durch einander mischt, fünf als Treffer herausgezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 30 besetzten Numern, a) gar keine, b) gerade eine und nicht mehr, c) gerade zwei, weder mehr noch weniger, d) gerade drei, weder mehr noch weniger, e) gerade vier, weder mehr noch weniger, f) gerade fünf und nicht weniger, g) wenigstens eine herauskomme?

Auflösung. a) Kommt gar keine von den 30 besetzten Numern heraus, so sind die fünf Treffer unter den 60 unbesetzten Numern enthalten, für welches Ereigniß $\frac{60 \,.\, 59 \,.\, 58 \,.\, 57 \,.\, 56}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ günstige und $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ gleich mögliche Fälle vorhanden sind, daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\dfrac{60 \,.\, 59 \,.\, 58 \,.\, 57 \,.\, 56}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}}{\dfrac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}} = \frac{15694}{126291} \text{ oder ungefähr } \frac{1}{8} \text{ beträgt.}$$

b) Kommt eine von den 30 besetzten Numern heraus, so sind die vier andern Treffer unter den 60 unbesetzten Numern enthalten, und es geben für dieses Ereigniß die 30 besetzten und 60 unbesetzten Numern $\frac{30}{1} \times \frac{60 \,.\, 59 \,.\, 58 \,.\, 57}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ günstige Fälle und alle 90 Numern $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ gleich mögliche Fälle

ab; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\frac{30 \,.\, 60 \,.\, 59 \,.\, 58 \,.\, 57}{1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}}{\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}} = \frac{28025}{84194}$$ oder ungefähr $\frac{1}{3}$ beträgt.

c) Kommen zwei von den 30 besetzten Numern heraus, so sind die drei andern Treffer unter den 60 unbesetzten Numern enthalten, und es geben für dieses Ereigniß die 30 besetzten und 60 unbesetzten Numern $\frac{30 \,.\, 29}{1 \,.\, 2} \times \frac{60 \,.\, 59 \,.\, 58}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ günstige Fälle und alle 90 Numern $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ gleich mögliche Fälle ab; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $$\frac{\frac{30 \,.\, 29 \,.\, 60 \,.\, 59 \,.\, 58}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3}}{\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}} = \frac{42775}{126291}$$ oder ungefähr $\frac{1}{3}$ beträgt.

d) Kommen drei von den 30 besetzten Numern heraus, so sind die zwei andern Treffer unter den 60 unbesetzten Numern enthalten, und es geben für dieses Ereigniß die 30 besetzten und 60 unbesetzten Numern $\frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \times \frac{60 \,.\, 59}{1 \,.\, 2}$ günstige und alle 90 Numern $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ gleich mögliche Fälle ab; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $$\frac{\frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28 \,.\, 60 \,.\, 59}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, 2}}{\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}} = \frac{20650}{126291}$$ oder ungefähr $\frac{8}{49}$ beträgt.

e) Kommen vier von den 30 besetzten Numern heraus, so ist ein Treffer unter den 60 unbesetzten Numern enthalten, und es geben für dieses Ereigniß die 30 besetzten und 60 unbesetzten Numern $\frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28 \,.\, 27}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \times \frac{60}{1}$ günstige und alle 90 Numern $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ gleich mögliche Fälle ab; daher die gesuchte

Wahrscheinlichkeit $\frac{\frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28 \,.\, 27 \,.\, 60}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 1}}{\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}} = \frac{1575}{42097}$ oder ungefähr $\frac{1}{27}$ beträgt.

f) Sind die fünf Treffer unter den 30 besetzten Numern enthalten, für welches Ereigniß $\frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28 \,.\, 27 \,.\, 26}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ günstige und $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ gleich mögliche Fälle vorhanden sind, so beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{\frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28 \,.\, 27 \,.\, 26}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}}{\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}} = \frac{273}{84194}$ oder ungefähr $\frac{1}{308}$.

g) Die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine von den 30 besetzten Numern herauskomme, ist gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit, daß entweder eine, oder zwei, oder drei, oder vier, oder fünf von diesen Numern herauskommen, und also gleich der Summe der fünf vorhergehenden Wahrscheinlichkeiten. Da es aber gewiß ist, daß von den 30 besetzten Numern entweder gar keine, oder eine, oder zwei, oder drei, oder vier, oder fünf als Treffer herauskommen, so müssen die sechs vorhergehenden Wahrscheinlichkeiten zusammen 1, das Symbol der Gewißheit ausmachen, und man erhält daher die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine von den 30 besetzten Numern herauskomme, am einfachsten dadurch, daß man die in a) enthaltene Wahrscheinlichkeit von 1 subtrahirt. Nach diesem beträgt die verlangte Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{15694}{126291} = \frac{110597}{126291}$ oder ungefähr $\frac{7}{8}$.

Aufgabe 7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der französischen Zahlenlotterie a) eine besetzte Numer (l'extrait simple), b) eine besetzte Numer an einem bestimmten Platze unter den Treffern (l'extrait déterminé, c) zwei besetzte Numern (l'ambe), d) zwei besetzte Numern, jede an einem bestimmten Platze unter

den Treffern (l'ambe déterminé), e) drei besetzte Numern (le terne), f) vier besetzte Numern (le quaterne), g) fünf besetzte Numern (le quine) herauskommen werden?

Auflösung. a) Für das Herauskommen einer besetzten Numer gibt es 5 günstige und 90 gleich mögliche Fälle; die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.

b) Für das Ereigniß, daß eine besetzte Numer an einem bestimmten Platze, etwa als erster Treffer herauskomme, gibt es nur 1 günstigen Fall und 90 gleich mögliche Fälle; die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher $\frac{1}{90}$.

c) Für das Herauskommen einer besetzten Ambe sind $\frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2}$ Fälle günstig und $\frac{90 \,.\, 89}{1 \,.\, 2}$ Fälle gleich möglich; die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher $\frac{\frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2}}{\frac{90 \,.\, 89}{1 \,.\, 2}} = \frac{2}{801}$.

d) Für das Ereigniß, daß zwei besetzte Numern an bestimmten Plätzen, etwa als erster und zweiter Treffer herauskommen, gibt es nur 1 günstigen Fall und 90 . 89 gleich mögliche Fälle; die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher $\frac{1}{90 \,.\, 89} = \frac{1}{8010}$.

e) Für das Herauskommen einer besetzten Terne sind $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ Fälle günstig und $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ Fälle gleich möglich; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}}{\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}} = \frac{1}{11748}$ beträgt.

f) Für das Herauskommen einer besetzten Quaterne sind $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ Fälle günstig und $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ Fälle gleich

möglich; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\dfrac{\dfrac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}}{\dfrac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}}$ $= \dfrac{1}{511038}$ beträgt.

g) Für das Herauskommen einer besetzten Quinte gibt es 1 günstigen Fall und $\dfrac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87\,.\,86}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$ gleich mögliche Fälle; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\dfrac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87\,.\,86}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}} = \dfrac{1}{43949268}$ beträgt *.

---

* 1. Man sieht leicht ein, daß eine Wette, welche zwischen mehreren Personen eingegangen wird, nur dann als billig oder gleich gelten kann, wenn der Einsatz oder die Mise eines jeden Spielenden seiner Wahrscheinlichkeit, die Wette zu gewinnen, genau proportional ist. Dasselbe läßt sich überhaupt von jedem Spiele sagen.

Wettet z. B. A, daß er mit zwei Würfeln auf einen Wurf zwei gleiche Augen werfen wird, und behauptet B das Gegentheil: so müssen sich ihre Einsätze respective wie 1 : 5 verhalten, weil die Wahrscheinlichkeit, diese gleichen Augen zu werfen, $= \frac{1}{6}$, die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{5}{6}$ ist.

Nach diesem Grundsatze des gesunden Menschenverstandes wurde schon längst gewettet und gespielt, ehe die Mathematiker darauf kamen, sich mit der Wahrscheinlichkeits-Rechnung zu beschäftigen und die Wetten und Spiele nach dem Calcul zu regeln.

2. Burg bemerkt (in seinem Lehrbuche der höhern Mathematik):

„Ist eine Wette gleich oder al pari eingegangen, so dienen wiederholte Versuche dazu, die Gewinnste und Verluste immer mehr und mehr auszugleichen. Personen, welche täglich Gesellschaftsspiele unter einander spielen, bei welchen die Bedingungen für beide Theile gleich sind, die also auch nahe gleiche Stärke im Spiele besitzen, sehen, wie sich mit der Zeit die Verluste gegen ihre Gewinnste nach und nach aufheben. Dagegen verschaffen sich die Banquiers bei Hasardspielen, denen sofort von ihren Gegnern gewisse Vortheile zugestanden werden, im Falle sie nur Fonds genug besitzen, um einzelne große Verluste decken zu können, mit der Zeit ein sicheres und immer wachsendes Einkommen.

Auf denselben Umstand gründet sich auch der sichere Gewinn, oder wenigstens der Fortbestand der Lotterien. Nehmen wir als Beispiel die französische Zahlenlotterie und untersuchen, welche Vortheile dieselbe gegen die Spieler voraus hat.

Aufgabe 8. Wenn Jemand in der französischen Zahlenlotterie 12 von den 90 Numern nach Willkühr wählen und alle darin enthaltenen Amben, Ternen, Quaternen und Quinten besetzen würde, wie groß wäre für ihn die Wahrscheinlichkeit, a) eine Ambe, b) eine Terne, c) eine Quaterne, d) eine Quinte zu gewinnen?

Auflösung. a) Nach der achten Aufgabe c) ist die Wahr-

Da die Wahrscheinlichkeit, eine von den 90 Numern zu errathen, $= \frac{1}{18}$ ist, so sollte der einfache Auszug mit dem 18fachen Einsatze bezahlt werden; es wird jedoch die Einlage dabei nur 15fach zurückbezahlt: so, daß sich das Lotto dabei um $(18 - 15) \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$ im Vortheile befindet. [Der Spieler sollte nämlich den 17fachen Einsatz gewinnen, er gewinnt aber nur den 14fachen; folglich ist der Vortheil des Lotto $= (17 - 14) \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$].

Die Wahrscheinlichkeit, eine Numer auf einen bestimmten, z. B. den ersten Ruf zu gewinnen, ist $= \frac{1}{90}$; da aber der Einsatz nicht 90, sondern nur 70fach zurückbezahlt wird, so ist der Vortheil des Lotto hiebei $= \frac{90 - 70}{90} = \frac{2}{9}$. [Oder $(89 - 69) \cdot \frac{1}{90} = \frac{2}{9}$.]

Die Wahrscheinlichkeit für eine Ambe ist $= \frac{2}{801}$, also sollte dem Spieler, wenn er eine Ambe gewinnt, sein Einsatz $\frac{801}{2} = 400{,}5$ mal erstattet werden; das Lotto zahlt aber nur den 270fachen Einsatz dafür, und ist somit dabei um $\frac{409{,}5 - 270}{400{,}5} = \frac{29}{89}$ (nahe $= \frac{1}{3}$) im Vortheile. [Der Spieler gewinnt nämlich anstatt des 399,5fachen Einsatzes nur den 269fachen; folglich ist das Lotto um $(399{,}5 - 269) \cdot \frac{2}{801} = \frac{29}{89}$ im Vortheile.]

Eine Terne oder das Herauskommen von drei besetzten Numern wird mit dem 5500fachen Einsatze bezahlt. Da aber die Wahrscheinlichkeit, eine solche zu gewinnen, $= \frac{1}{11748}$ ist, so sollte der Spieler den 11747fachen Einsatz gewinnen; er gewinnt aber den Einsatz nur 5499mal, und das Lotto ist demnach hier um $\frac{11747 - 5499}{11748} = \frac{142}{267}$ (etwas $> \frac{1}{2}$) im Vortheile.

Da endlich die Quaterne mit dem 75000 und die Quinte mit dem 1000000fachen Einsatze bezahlt wird, dagegen die Wahrscheinlichkeiten, eine Quaterne, oder Quinte zu gewinnen, respective $\frac{1}{511038}$ und $\frac{1}{43949268}$ sind, so findet man, wie vorhin, für den Vortheil des Lotto im ersten Falle $\frac{72673}{85173}$ ($> \frac{5}{6}$) und im zweiten Falle $\frac{10737317}{10987317}$ ($> \frac{42}{43}$).

Es muß jedoch bemerkt werden, daß der hier für das Lotto berechnete Gewinn wieder dadurch etwas vermindert wird, daß nicht alle Combinationen der Numern gleich stark besetzt werden; was aber vorausgesetzt werden muß, wenn dasselbe ganz den entwickelten Vortheil haben soll. Uebrigens braucht diese Ausgleichung bei weitem nicht vollkommen stattzufinden, um dem Lotto dennoch einen Gewinn zu sichern; was indessen der Kosten und des Risico wegen nothwendig ist, sobald ein Fortbestand nach dem Wunsche der Spieler nicht in Frage gestellt seyn soll."

scheinlichkeit für das Herauskommen einer besetzten Ambe $= \dfrac{\frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}}{\frac{90\,.\,89}{1\,.\,2}}$; die 12 Numern enthalten aber $\dfrac{12\,.\,11}{1\,.\,2}$ Amben, und es beträgt daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\dfrac{\frac{5\,.\,4}{1\,.\,2} \times \frac{12\,.\,11}{1\,.\,2}}{\frac{90\,.\,89}{1\,.\,2}} = \dfrac{44}{267}$.

b) Nach der achten Aufgabe e) ist die Wahrscheinlichkeit für das Herauskommen einer besetzten Terne $= \dfrac{\frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}}{\frac{90\,.\,89\,.\,88}{1\,.\,2\,.\,3}}$; die 12 Numern enthalten aber $\dfrac{12\,.\,11\,.\,10}{1\,.\,2\,.\,3}$ Ternen, und es beträgt daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\dfrac{\frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3} \times \frac{12\,.\,11\,.\,10}{1\,.\,2\,.\,3}}{\frac{90\,.\,89\,.\,88}{1\,.\,2\,.\,3}} = \dfrac{5}{267}$.

c) Nach der achten Aufgabe f) ist die Wahrscheinlichkeit für das Herauskommen einer besetzten Quaterne $= \dfrac{\frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}}{\frac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}}$; die 12 Numern enthalten aber $\dfrac{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$ Quaternen, und es beträgt daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\dfrac{\frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \times \frac{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}}{\frac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}} = \dfrac{5}{5162}.$$

d) Nach der achten Aufgabe g) ist die Wahrscheinlichkeit für das Herauskommen einer besetzten Quinte $= \dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87\,.\,86}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}}$;

die 12 Numern enthalten aber $\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5}$ Quinten, und es beträgt daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\frac{1}{1} \times \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5}}{\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}} = \frac{2}{110983}.$$

Aufgabe 9. In einer Urne befinden sich n vollkommen gleiche Kugeln. Wenn man nun aufs Gerathewohl hineingreift und davon irgend eine Anzahl herauszieht, wie wahrscheinlich ist es, a) daß diese Anzahl gerade, b) daß diese Anzahl ungerade sey?

Auflösung. Des bessern Verständnisses wegen wollen wir bei der vorliegenden Aufgabe annehmen, 1) n sey = 8, 2) n sey = 9 und 3) n sey irgend eine gerade, oder ungerade Zahl.

1. Fall *. Befinden sich 8 Kugeln in der Urne, so sind dem Ereignisse, eine gerade Anzahl Kugeln zu ziehen, die Verbindungen der 8 Kugeln zu je 2, 4, 6, 8 günstig und die Verbindungen zu je 1, 3, 5, 7 ungünstig, ferner dem Ereignisse, eine ungerade Anzahl Kugeln zu ziehen, die Verbindungen der 8 Kugeln zu je 1, 3, 5, 7 günstig und die Verbindungen zu je 2, 4, 6, 8 ungünstig. Nun geben 8 Kugeln $\frac{8.7}{1.2} = 28$ Verbindungen zu je 2, $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$ Verbindungen zu je 4, $\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} = 28$ Verbindungen zu je 6 und 1 Verbindung zu 8, also im Ganzen $28 + 70 + 28 + 1 = 127$ Fälle, welche dem Ereignisse, eine gerade Anzahl Kugeln zu ziehen, günstig sind; die 8 Kugeln geben ferner 8 Verbindungen zu je 1, $\frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$ Verbindungen zu je 3, $\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56$ Verbindungen

* Folgende Aufgabe scheint mit der vorliegenden viel Aehnlichkeit zu haben, ist jedoch, wie einiges Nachdenken lehren wird, von derselben ganz und gar verschieden:

Befinden sich in einer Urne 8 mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bezeichnete Kugeln, so ist beim Herausnehmen einer Kugel die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit einer geraden Numer (2, 4, 6, 8) zu ziehen, eben so groß, als die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit einer ungeraden Numer (1, 3, 5, 7) zu erhalten; denn jede dieser Wahrscheinlichkeiten beträgt $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

zu je 5 und $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 8$ Verbindungen zu je 7, also im Ganzen $8 + 56 + 56 + 8 = 128$ Fälle, welche dem Ereignisse, eine ungerade Anzahl Kugeln zu ziehen, günstig sind. Es beträgt daher die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der herausgezogenen Kugeln gerade sey, $\frac{127}{127 + 128} = \frac{127}{255}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß sie ungerade sey, $= \frac{128}{255}$.

2. Fall. Befinden sich 9 Kugeln in der Urne, so sind dem Ereignisse, eine gerade Anzahl Kugeln zu ziehen, die Verbindungen der 9 Kugeln zu je 2, 4, 6, 8 günstig und die Verbindungen zu je 1, 3, 5, 7, 9 ungünstig, ferner dem Ereignisse, eine ungerade Anzahl Kugeln zu ziehen, die Verbindungen der 9 Kugeln zu je 1, 3, 5, 7, 9 günstig und die Verbindungen zu je 2, 4, 6, 8 ungünstig. Nun geben 9 Kugeln $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ Verbindungen zu je 2, $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ Verbindungen zu je 4, $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ $= 84$ Verbindungen zu je 6 und $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 9$ Verbindungen zu je 8, also im Ganzen $36 + 126 + 84 + 9 = 255$ Fälle, welche dem Ereignisse, eine gerade Anzahl Kugeln zu ziehen, günstig sind; die 9 Kugeln geben ferner 9 Verbindungen zu je 1, $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ Verbindungen zu je 3, $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126$ Verbindungen zu je 5, $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 36$ Verbindungen zu je 7 und 1 Verbindung zu 9, also im Ganzen $9 + 84 + 126 + 36 + 1 = 256$ Fälle, welche dem Ereignisse, eine ungerade Anzahl Kugeln zu ziehen, günstig sind. Es beträgt demnach die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der herausgezogenen Kugeln gerade sey, $\frac{255}{255 + 256} = \frac{255}{511}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß sie ungerade sey, $\frac{256}{511}$.

3. Fall. Befinden sich überhaupt n Kugeln in der Urne, so sind dem Ereignisse, eine gerade Anzahl Kugeln zu ziehen, die

Verbindungen der n Kugeln zu je 2, 4, 6, ꝛc. günstig und die Verbindungen zu je 1, 3, 5, ꝛc. ungünstig; dem Ereignisse, eine ungerade Anzahl Kugeln zu ziehen, die Verbindungen der n Kugeln zu je 1, 3, 5, ꝛc. günstig und die Verbindungen zu je 2, 4, 6, ꝛc. ungünstig. Nun geben n Kugeln

$\frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}$ Verbindungen zu je 2,

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ Verbindungen zu je 4,

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}$ Verbindungen zu je 6, ꝛc.,

also im Ganzen

$$\frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} + \text{ꝛc.} = G$$

Fälle, welche dem Ereignisse, eine gerade Anzahl Kugeln zu ziehen, günstig sind; die n Kugeln geben ferner

n Verbindungen zu je 1,

$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ Verbindungen zu je 3,

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ Verbindungen zu je 5, ꝛc., also im Ganzen

$$n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} + \text{ꝛc.} = U$$

Fälle, welche dem Ereignisse, eine ungerade Anzahl Kugeln zu ziehen, günstig sind. Welche Zahl man sich aber unter n auch denken mag, so ist nach dem binomischen Satze

$$(1+1)^n - 1 = \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} + \text{ꝛc.}$$

oder I. $2^n - 1 = G + U$, ferner

$$(1-1)^n - 1 = -\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} + \text{ꝛc.}^*$$

---

* Substituirt man nämlich in den bekannten Binominalformeln:

oder II. $-1 = G - U$,

und man erhält aus I. und II. durch Addition

$$G = 2^{n-1} - 1\text{, durch Subtraction}$$

$$U = 2^{n-1}\text{, wornach}$$

$$G + U = 2^n - 1.$$

Es beträgt daher die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der herausgezogenen Kugeln gerade sey,

$$\frac{G}{G+U} = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß sie ungerade sey,

$$\frac{U}{G+U} = \frac{2^{n-1}}{2^n-1}\ *.$$

Da es gewiß ist, daß man entweder eine gerade, oder eine ungerade Anzahl Kugeln herauszieht, so muß

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1} + \frac{2^{n-1}}{2^n-1} = 1 \text{ seyn } **.$$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}a^{n-5}b^5 + \text{rc.}$$

und $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}a^{n-5}b^5 - \text{rc.}$$

$a = 1$, $b = 1$, so erhält man

$$(1+1)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} + \text{rc.}$$

und $(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} + \text{rc.}$$

* Diese allgemeine Auflösung verdankt man Bertrand aus Genève. Er übergab sie der Academie der Wissenschaften zu Paris im Jahre 1786.

** 1. Substituirt man in den Ausdrücken $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$ und $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$ successive $n = 8$, $n = 9$, so ergeben sich die im ersten und zweiten Falle gefundenen Wahrscheinlichkeits-Ausdrücke.

2. Aus diesen allgemeinen Wahrscheinlichkeits-Ausdrücken erkennt man

Angewandte Aufgaben über die relative Wahrscheinlichkeit, sowie über die zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit nebst den Auflösungen.

§. 64.

1) Erstreckt sich eine Handlung oder ein Versuch auf die Ereignisse A, B, C, ... und sind a Fälle dem Ereignisse A, b Fälle dem Ereignisse B, c Fälle dem Ereignisse C, ... günstig, so ist, wenn wir Kürze halber $a + b + c + \ldots = s$ setzen,

α) die Wahrscheinlichkeit, daß eher das Ereigniß A als das Ereigniß B eintreffe, wofür a günstige und a + b gleich mögliche Fälle vorhanden sind, $= \frac{a}{a+b} = \frac{\frac{a}{s}}{\frac{a}{s} + \frac{b}{s}}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß eher das Ereigniß B als das Ereigniß A eintreffe, wofür b günstige und a + b gleich mögliche Fälle vorhanden sind, $= \frac{b}{a+b} = \frac{\frac{b}{s}}{\frac{a}{s} + \frac{b}{s}}$ (§. 58);

β) die Wahrscheinlichkeit, daß eher das Ereigniß A als das Ereigniß C eintreffe, wofür a günstige und a + c gleich mögliche Fälle vorhanden sind, $= \frac{a}{a+c} = \frac{\frac{a}{s}}{\frac{a}{s} + \frac{c}{s}}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß eher das Ereigniß C als das Ereigniß A eintreffe, wofür c günstige und a + c gleich mögliche Fälle vorhanden sind, $= \frac{c}{a+c} = \frac{\frac{c}{s}}{\frac{a}{s} + \frac{c}{s}}$;

---

sogleich, daß die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl Kugeln aus der Urne zu ziehen, stets größer ist, als die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl Kugeln herauszuziehen, die Anzahl der in der Urne enthaltenen Kugeln mag gerade oder ungerade seyn; ferner, daß diese beiden Wahrscheinlichkeiten um so weniger von einander differiren, je größer die Anzahl der in der Urne befindlichen Kugeln ist.

γ) die Wahrscheinlichkeit, daß eher das Ereigniß B als das Ereigniß C eintreffe, wofür b günstige und b + c gleich mögliche Fälle vorhanden sind, $= \frac{b}{b+c} = \frac{\frac{b}{s}}{\frac{b}{s}+\frac{c}{s}}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß eher das Ereigniß C als das Ereigniß B eintreffe, wofür c günstige und b + c gleich mögliche Fälle vorhanden sind,

$$= \frac{c}{b+c} = \frac{\frac{c}{s}}{\frac{b}{s}+\frac{c}{s}}; \ldots$$

2) In α) macht die Wahrscheinlichkeit, daß eher das Ereigniß A als das Ereigniß B eintreffe, mit der Wahrscheinlichkeit, daß eher das Ereigniß B als das Ereigniß A eintreffe, zusammen 1 aus; von diesen beiden Wahrscheinlichkeiten ist also jede die entgegengesetzte der andern. Dasselbe gilt von den in β) und γ) enthaltenen relativen Wahrscheinlichkeiten. (Vergl. §. 58.)

Aufgabe 1. In einer Urne befinden sich 20 Kugeln, nämlich 4 weiße, 6 schwarze und 10 rothe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug aus derselben eher drei weiße, als drei schwarze Kugeln zu ziehen?

Auflösung. Für das Ereigniß, 3 weiße Kugeln zu ziehen, geben die 4 weißen Kugeln $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ günstige Fälle, alle 20 Kugeln $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ gleich mögliche Fälle ab; es beträgt daher die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\frac{\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{1}{285}$.

Für das Ereigniß, 3 schwarze Kugeln zu ziehen, geben die 6 schwarzen Kugeln $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ günstige Fälle, alle 20 Kugeln

$\frac{20.19.18}{1.2.3}$ gleich mögliche Fälle ab; es beträgt daher die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\frac{\frac{6.5.4}{1.2.3}}{\frac{20.19.18}{1.2.3}} = \frac{1}{57}$.

Nach diesen beiden Resultaten ist ferner die Wahrscheinlichkeit, eher 3 weiße, als 3 schwarze Kugeln zu ziehen, $= \frac{\frac{1}{285}}{\frac{1}{285} + \frac{1}{57}}$ $= \frac{1}{6}$*; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, eher 3 schwarze, als 3 weiße Kugeln zu ziehen,

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Aufgabe 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln auf einen Wurf eher einen Pasch, d. h. gerade zwei gleiche Augen, als eine Terne, d. h. gerade drei gleiche Augen, zu werfen?

Auflösung. Mit drei Würfeln können $6 \times 6 \times 6$ verschiedene Würfe gemacht werden, worunter auch die Fälle begriffen sind, in welchen die drei Würfel gerade zwei gleiche Augen zeigen. Betrachten wir nun, um die Anzahl dieser Fälle zu bestimmen, die Würfel A, B, C, welche $\frac{3.2}{1.2} = 3$ verschiedene Verbindungen zu je zweien abgeben, und lassen die Würfel A, B die zwei gleichen Augen 11, 22, ... 66 zeigen, so kann der Würfel C noch 5 Augen abgeben, wodurch 6×5 verschiedene Verbindungen zu je dreien entstehen; es beläuft sich demnach die Anzahl aller Fälle, in welchen drei Würfel gerade zwei gleiche Augen zeigen können,

---

* Folgende Auflösung ist etwas einfacher:

Für das Ereigniß, eher 3 weiße, als 3 schwarze Kugeln zu ziehen, geben die 4 weißen Kugeln $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$ günstige Fälle, die 6 schwarzen Kugeln $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ ungünstige Fälle ab; also beträgt die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\frac{4}{4+20} = \frac{1}{6}$.

auf $3 \times 6 \times 5$, und die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses beträgt $\frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{12}$.

Da ferner drei Würfel 6mal drei gleiche Augen 111, 222, ... 666 zeigen können, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\frac{6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$.

Nach diesen beiden Resultaten ist endlich die Wahrscheinlichkeit, eher einen Pasch, als eine Terne zu werfen, $\frac{\frac{5}{12}}{\frac{5}{12} + \frac{1}{36}}$ $= \frac{15}{16}$ *; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, eher eine Terne, als einen Pasch zu werfen,

$$= 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}.$$

3) Hat man die Wahrscheinlichkeit für das unmittelbare Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse A, A_1 in der Voraussetzung zu bestimmen, daß a Fälle dem Eintreffen des Ereignisses A günstig und b Fälle ungünstig, a_1 Fälle dem Eintreffen des Ereignisses A_1 günstig und b_1 Fälle ungünstig seyen, so findet man die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß A eintreffe, $= \frac{a}{a + b}$, die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß A_1 eintreffe, $= \frac{a_1}{a_1 + b_1}$, und es sind für das unmittelbare Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse $a \times a_1$ günstige und $(a + b) \cdot (a_1 + b_1)$ gleich mögliche Fälle vorhanden; so, daß also die Wahrscheinlichkeit, daß die Ereignisse A und A_1 unmittelbar

---

* Folgende Auflösung ist etwas einfacher:
Für das Ereigniß, mit drei Würfeln auf einen Wurf eher einen Pasch, als eine Terne zu werfen, gibt es, wie oben gezeigt wurde, $3 \times 6 \times 5 = 90$ günstige und 6 ungünstige Fälle; also beträgt die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\frac{90}{90 + 6} = \frac{15}{16}$.

auf einander folgen oder zusammentreffen, $\frac{a \, . \, a_1}{(a + b) \, . \, (a_1 + b_1)}$ $= \frac{a}{a + b} \times \frac{a_1}{a_1 + b_1}$ beträgt. (Vergl. §. 61.)

Setzt man überhaupt die absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $= w$, die absolute Wahrscheinlichkeit eines andern Ereignisses $= w_1$, so ist dem Vorhergehenden gemäß die zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit dieser beiden Ereignisse $= w \times w_1$; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß diese beiden Ereignisse nicht unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen, $= 1 - w \times w_1$ (§. 55).

4) Soll ferner die Wahrscheinlichkeit für das unmittelbare Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse A, A_1, A_2, ... in der Voraussetzung bestimmt werden, daß a Fälle dem Ereignisse A günstig und b Fälle ungünstig, a_1 Fälle dem Ereignisse A_1 günstig und b_1 Fälle ungünstig, a_2 Fälle dem Ereignisse A_2 günstig und b_2 Fälle ungünstig, ... seyen, so findet man die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß A eintreffe, $= \frac{a}{a + b}$, die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß A_1 eintreffe, $= \frac{a_1}{a_1 + b_1}$, die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß A_2 eintreffe, $= \frac{a_2}{a_2 + b_2}$, ..., und es sind für das unmittelbare Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen dieser sämmtlichen Ereignisse $a \times a_1 \times a_2 \ldots$ günstige Fälle und $(a + b) \, . \, (a_1 + b_1) \, . \, (a_2 + b_2) \ldots$ gleich mögliche Fälle vorhanden; so, daß also die Wahrscheinlichkeit, daß die Ereignisse A, A_1, A_2, ... unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen, $\frac{a \, . \, a_1 \, . \, a_2 \, . \, . \, . \, . \, .}{(a + b) \, . \, (a_1 + b_1) \, . \, (a_2 + b_2) \, . \, . \, . \, .}$ $= \frac{a}{a + b} \times \frac{a_1}{a_1 + b_1} \times \frac{a_2}{a_2 \times b_2} \times \ldots$ beträgt. (Vergl. §. 62.)

Setzt man überhaupt die absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $= w$, die absolute Wahrscheinlichkeit eines zweiten Ereignisses $= w_1$, die absolute Wahrscheinlichkeit eines dritten Ereignisses $= w_2, \ldots$,

so ist dem Vorhergehenden gemäß die zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit der sämmtlichen Ereignisse $= w \times w_1 \times w_2 \ldots$; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß die sämmtlichen Ereignisse nicht unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen,

$$= 1 - w \times w_1 \times w_2 \ldots \text{ (§. 55.) *.}$$

Aufgabe 3. Aus einem Kasten, in dem sich 24 Kugeln, nämlich 6 weiße, 8 schwarze und 10 rothe befinden, sollen zuerst sieben Kugeln und hierauf von den alsdann noch übrigen 17 Kugeln wieder drei herausgezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die sieben Kugeln alle roth und zugleich die drei Kugeln alle weiß seyn werden?

Auflösung. Für das Ereigniß, 7 rothe Kugeln zu ziehen, liefern die 10 rothen Kugeln $\frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7}$ günstige

---

* Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses läßt sich häufig auf verschiedene Weise betrachten und berechnen, wie aus den zwei Auflösungen der folgenden Aufgabe erhellen wird.

Aufgabe. Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß von den 13 Karten einer Farbe eines vollständigen Spieles, welche man gehörig gemischt in ein Paket gebracht hat, die zwei ersten oder obersten das Aß und der König seyen.

1. Auflösung nach der einfachen Wahrscheinlichkeit:

Für das Ereigniß, daß von den 13 Karten zwei bezeichnete, wie das Aß und der König, zuerst kommen, liefern die 11 übrigen Karten $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$ günstige Fälle, und alle 13 Karten $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13$ gleich mögliche Fälle; es beträgt also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 12 \,.\, 13} = \frac{1}{12 \,.\, 13} = \frac{1}{156}.$$

2. Auflösung nach der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit:

Die Wahrscheinlichkeit, daß von den 13 Karten das Aß die erste sey, beträgt $\frac{1}{13}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß von den übrigen 12 Karten der König die erste sey, $\frac{1}{12}$; also die gesuchte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser beiden Ereignisse $\frac{1}{13} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{156}$.

Fälle, alle 24 Kugeln $\frac{24.23.22.21.20.19.18}{1.2.3.4.5.6.7}$ gleich mögliche Fälle; es beträgt daher die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

$$\frac{\frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7}}{\frac{24.23.22.21.20.19.18}{1.2.3.4.5.6.7}} = \frac{5}{14421}.$$

Für das Ereigniß, 3 weiße Kugeln zu ziehen, liefern die 6 weißen Kugeln $\frac{6.5.4}{1.2.3}$ günstige Fälle, alle 17 Kugeln $\frac{17.16.15}{1.2.3}$ gleich mögliche Fälle; es beträgt daher die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\frac{\frac{6.5.4}{1.2.3}}{\frac{17.16.15}{1.2.3}} = \frac{1}{34}$.

Nach den gefundenen Resultaten ist endlich die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse

$$= \frac{5}{14421} \times \frac{1}{34} = \frac{5}{490314}.$$

Aufgabe 4. Von zwei Urnen enthält die erste 5 weiße und 7 schwarze, die zweite 8 weiße und 10 schwarze Kugeln. Wenn nun aus der ersten Urne sechs und hierauf aus der zweiten Urne neun Kugeln genommen werden, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den sechs Kugeln aus der ersten Urne zwei weiße und zugleich unter den neun Kugeln aus der zweiten Urne vier weiße Kugeln befinden?

Auflösung. Für das Ereigniß, daß sich unter den 6 Kugeln aus der ersten Urne 2 weiße und somit 4 schwarze befinden, liefern die 5 weißen und 7 schwarzen Kugeln der ersten Urne $\frac{5.4}{1.2} \times \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ günstige Fälle, alle 12 Kugeln der ersten Urne $\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}$ gleich mögliche Fälle; es beträgt daher die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

$$\frac{\frac{5.4}{1.2} \times \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}}{\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}} = \frac{25}{66}.$$

Für das Ereigniß, daß sich unter den neun Kugeln aus der zweiten Urne 4 weiße und somit 5 schwarze befinden, liefern die 8 weißen und 10 schwarzen Kugeln der zweiten Urne $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \times \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}$ günstige Fälle, alle 18 Kugeln der zweiten Urne $\frac{18.17.16.15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$ gleich mögliche Fälle; es beträgt daher die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

$$\frac{\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \times \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}}{\frac{18.17.16.15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}} = \frac{882}{2431}.$$

Nach den gefundenen Resultaten ist endlich die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der beiden Ereignisse $\frac{25}{66} \times \frac{882}{2431} = \frac{3675}{26741}$ oder ungefähr $\frac{3}{22}$.

Aufgabe 5. In einer Urne befinden sich 3 weiße und 5 schwarze, in einer andern Urne 7 weiße und 5 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch einen zufälligen Griff in eine der beiden Urnen sogleich eine schwarze Kugel zu erhalten?

Auflösung. Es ist die Wahrscheinlichkeit, sogleich in die Urne zu greifen, welche 3 weiße und 5 schwarze Kugeln enthält, $= \frac{1}{2}$, und hierauf die Wahrscheinlichkeit, aus derselben eine schwarze Kugel zu ziehen, $= \frac{5}{8}$; so, daß also die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser beiden Ereignisse $\frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$ beträgt.

Es ist ferner die Wahrscheinlichkeit, sogleich in die Urne zu greifen, welche 7 weiße und 5 schwarze Kugeln enthält, $= \frac{1}{2}$, und hierauf die Wahrscheinlichkeit, aus derselben eine schwarze Kugel zu ziehen, $= \frac{5}{12}$; so, daß also die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser beiden Ereignisse $\frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$ beträgt.

Nach den gefundenen Resultaten ist endlich die Wahrscheinlichkeit, durch einen zufälligen Griff in eine der beiden Urnen sogleich eine schwarze Kugel zu erhalten, wofür entweder das erste, oder das zweite der vorhergehenden zusammengesetzten Ereignisse eintreten kann, $= \frac{5}{16} + \frac{5}{24} = \frac{25}{48}$.

Aufgabe 6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 10, oder im Falle des Mißlingens doch auf den zweiten Wurf 9 zu werfen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Wurf 10 zu werfen, ist $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, und daher die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit des Mißlingens

$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Es ist ferner die Wahrscheinlichkeit, auf den zweiten Wurf 9 zu werfen, $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, und daher die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Wurf nicht 10 und zugleich auf den zweiten Wurf 9 zu werfen, $= \frac{11}{12} \times \frac{1}{9} = \frac{11}{108}$.

Endlich beträgt die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit, entweder auf den ersten Wurf 10 zu werfen, oder auf den ersten Wurf nicht 10 und zugleich auf den zweiten Wurf 9 zu werfen,

$$\frac{1}{12} + \frac{11}{108} = \frac{5}{27}.$$

Aufgabe 7. Bei einem Spiele mit zwei Würfeln hat A bereits 10 geworfen. Wenn nun B den letzten Wurf hat, wie groß ist seine Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen?

Auflösung. Wirft B auch 10, so müssen A und B das Spiel wiederholen, damit sich der Gewinn entscheiden kann. Um daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, fragen wir uns, wie groß die Wahrscheinlichkeit sey, daß B entweder auf den ersten Wurf mehr als 10, oder auf den ersten Wurf 10 werfe und zugleich bei der Wiederholung des Spieles gewinne.

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß B sogleich mehr als 10, also entweder 11, oder 12 werfe, $= \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

Es ist ferner die Wahrscheinlichkeit, daß B 10 werfe, $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, und hierauf die Wahrscheinlichkeit, daß B gewinne, wenn aufs Neue gespielt wird, $= \frac{1}{2}$, also die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser beiden Ereignisse $= \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.

Nach dem Vorhergehenden beträgt endlich die Wahrscheinlichkeit, daß B das Spiel gewinne, $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, daß B das Spiel verliere, welcher Fall eintritt, wenn B entweder auf den ersten Wurf weniger als 10, oder auf den ersten Wurf 10 wirft und zugleich bei der Wiederholung des Spieles verliert, beträgt

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Wiederholte Versuche.

§. 65.

Nachdem wir nun die zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit der Ereignisse im Allgemeinen abgehandelt haben, wollen wir noch insbesondere von der Auflösung derjenigen Aufgaben über zusammengesetzte oder concurrirende Wahrscheinlichkeit sprechen, welche die Bestimmung enthalten, daß ein und derselbe Versuch mehreremal nach einander wiederholt werden soll.

Gesetzt, ein und derselbe Versuch, welcher sich über die Ereignisse A und B erstreckt, werde mehreremal nach einander angestellt, und es seyen bei jedem einzelnen dieser wiederholten Versuche stets a Fälle dem Ereignisse A, b Fälle dem Ereignisse B günstig: so umfaßt der erste Versuch a + b gleich mögliche Fälle, und es ist daher die einfache Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A $= \frac{a}{a+b}$, die einfache Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B (die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A) $= \frac{b}{a+b}$.

Folgt hierauf dem ersten Versuche ein neuer, so umfassen die zwei ersten Versuche

$$(a + b) \cdot (a + b) = aa + ab + ba + bb$$

gleich mögliche Fälle, von welchen $aa = a^2$ Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse A, A, ab Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse A, B, ba Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse B, A, also 2ab Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse A, B, wenn die Ordnung von A, B beliebig ist, $bb = b^2$ Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse B, B günstig sind. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses $AA = \frac{a^2}{(a+b)^2}$, die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses $AB = \frac{2ab}{(a+b)^2}$, wenn die Ordnung von A, B beliebig ist, und $= \frac{ab}{(a+b)^2}$, wenn eine bestimmte Ordnung von A, B vorgeschrieben ist, die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses $BB = \frac{b^2}{(a+b)^2}$. Substituiren wir sofort in diesen Ausdrücken $\frac{a}{a+b} = \alpha$, $\frac{b}{a+b} = \beta$, so wird $\frac{a^2}{(a+b)^2} = \alpha^2$, $\frac{2ab}{(a+b)^2} = 2\alpha\beta$, $\frac{b^2}{(a+b)^2} = \beta^2$, und es sind alle Ausdrücke zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit, welche sich beim zweimaligen Anstellen eines und desselben Versuches ergeben, wenn sich derselbe auf zwei Ereignisse erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten α und β ausdrücken, in folgender Formel enthalten:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

§. 66.

Folgt ferner auf die zwei vorhergehenden Versuche ein neuer Versuch, so umfassen die drei ersten Versuche

$$(a+b) . (a+b) . (a+b) = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

gleich mögliche Fälle, von welchen a^3 Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse A, A, A, $3a^2b$ Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen oder Zusammentreffen der Ereignisse A, A, B, wenn die Ordnung von A, A, B beliebig ist, $3ab^2$ Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen oder

Zusammentreffen der Ereignisse A, B, B, wenn die Ordnung von A, B, B beliebig ist, b^3 Fälle dem unmittelbaren Aufeinanderfolgen und Zusammentreffen der Ereignisse B, B, B günstig sind. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses AAA $= \frac{a^3}{(a+b)^3}$, die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses AAB $= \frac{3a^2b}{(a+b)^3}$, wenn die Ordnung von A, A, B beliebig ist, und $= \frac{a^2b}{(a+b)^3}$, wenn eine bestimmte Ordnung von A, A, B vorgeschrieben ist, die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses ABB $= \frac{3ab^2}{(a+b)^3}$, wenn die Ordnung von A, B, B beliebig ist, und $= \frac{ab^2}{(a+b)^3}$, wenn eine bestimmte Ordnung von A, B, B vorgeschrieben ist, die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses BBB $= \frac{b^3}{(a+b)^3}$. Substituiren wir sofort $\frac{a}{a+b} = \alpha$, $\frac{b}{a+b} = \beta$, so wird $\frac{a^3}{(a+b)^3} = \alpha^3$, $\frac{3a^2b}{(a+b)^3} = 3\alpha^2\beta$, $\frac{3ab^2}{(a+b)^3} = 3\alpha\beta^2$, $\frac{b^3}{(a+b)^3} = \beta^3$, und es sind alle Ausdrücke zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit, welche sich beim dreimaligen Anstellen eines und desselben Versuches ergeben, wenn sich derselbe auf zwei Ereignisse erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten α und β ausdrücken, in folgender Formel enthalten:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$$

§. 67.

Auf ähnliche Weise folgert man, daß alle Ausdrücke zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit, welche sich beim viermaligen Anstellen eines und desselben Versuches ergeben, wenn sich derselbe auf die Ereignisse A und B erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten respective α und β ausdrücken, in folgender Formel enthalten sind:

$$(\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4,$$

worin alsdann α^4 = der Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses AAAA, $4\alpha^3\beta$ = der Wahrscheinlichkeit des zusammen-

gesetzten Ereignisses AAAB, wenn die Ordnung von A, A, A, B beliebig ist, und $\alpha^3\beta$ = der Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses AAAB, wenn eine bestimmte Ordnung von A, A, A, B vorgeschrieben ist, $6\alpha^2\beta^2$ = der Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses AABB, wenn die Ordnung von A, A, B, B beliebig ist, und $\alpha^2\beta^2$ = der Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses AABB, wenn eine bestimmte Ordnung von A, A, B, B vorgeschrieben ist, $4\alpha\beta^3$ = der Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses ABBB, wenn die Ordnung von A, B, B, B beliebig ist, und $\alpha\beta^3$ = der Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses ABBB, wenn eine bestimmte Ordnung von A, B, B, B vorgeschrieben ist, β^4 = der Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses BBBB.

§. 68.

Ebenso findet man, daß **überhaupt alle Ausdrücke zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit, welche sich beim n maligen Anstellen eines und desselben Versuches ergeben, wenn sich derselbe auf die Ereignisse A und B erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten respective α und β ausdrücken, in folgender Formel enthalten sind:**

$$(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}\alpha^{n-2}\beta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\alpha^{n-3}\beta^3 + \ldots + \beta^n,$$

worin das allgemeine Glied

$$= \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-m)}\alpha^m\beta^{n-m} \text{ *}$$

---

* Wie man nämlich sogleich erkennt, ist in dieser Binomialformel das allgemeine Glied, welchem m Glieder vorhergehen,

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots m}\alpha^m\beta^{n-m}.$$

Multiplicirt man hierauf den Zähler und Nenner dieses Ausdruckes mit $1 \times 2 \times 3 \ldots (n-m)$, so verwandelt er sich in

$$\frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)] \,.\, (n-m)\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-m)}\alpha^m\beta^{n-m}$$

$$= \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-m)}\alpha^m\beta^{n-m}.$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrückt, daß unter diesen n Versuchen die Ereignisse A, B in einer beliebigen Ordnung unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen und zwar A m mal, B n—m mal, und $\alpha^m \beta^{n-m}$ die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrückt, daß unter diesen n Versuchen die Ereignisse A, B in einer vorgeschriebenen Ordnung unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen und zwar A m mal, B n—m mal.

§. 69.

Nach dem Vorhergehenden läßt sich nunmehr ohne weitere Entwicklung sogleich aufstellen, daß alle Ausdrücke zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit, welche sich beim n maligen Anstellen eines und desselben Versuches ergeben, wenn sich derselbe auf die Ereignisse A, B, C erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten respective α, β, γ, ausdrücken, in folgender Formel enthalten sind:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n,$$

worin, wenn $p + q + r = n$, das allgemeine Glied

$$= \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots r} \alpha^p \beta^q \gamma^r \; *$$

---

* Das allgemeine Glied der Polynomialformel $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n + \ldots + \delta^n + \ldots$ d. h. dasjenige Glied, welches $\alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s \ldots$ enthält, wenn p, q, r, s,... beliebige ganze positive Zahlen bezeichnen, und $p + q + r + s + \ldots = n$, läßt sich leicht von dem allgemeinen Gliede der Binomialformel ableiten.

Setzt man nämlich 1) $x = \beta + \gamma + \delta + \ldots$, so wird $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots)^n = (\alpha + x)^n$; und es ist das allgemeine Glied der Entwicklung dieses Binoms, welches α^p enthält.

$$(I) = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots(n-p)} \alpha^p x^{n-p}.$$

Setzt man 2) $y = \gamma + \delta + \ldots$, so wird $x^{n-p} = (\beta + y)^{n-p}$; und es ist das allgemeine Glied der Entwicklung dieses Binoms, welches β^q enthält,

$$= \frac{1.2.3\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots(n-p-q)} \beta^q y^{n-p-q}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck anstatt x^{n-p} in (I), so erhält man

$$\frac{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots(n-p) \times 1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots(n-p-q)} \alpha^p \beta^q y^{n-p-q}$$

$$(II) = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots(n-p-q)} \alpha^p \beta^q y^{n-p-q}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrückt, daß unter diesen n Versuchen die Ereignisse A, B, C in einer beliebigen Ordnung unmittelbar aufeinander folgen oder zusammentreffen und zwar A p mal, B q mal, C r mal, und $\alpha^p\beta^q\gamma^r$ die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrückt, daß unter diesen n Versuchen die Ereignisse A, B, C in einer vorgeschriebenen Ordnung unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen und zwar A p mal, B q mal, C r mal.

---

welcher Ausdruck somit offenbar das allgemeine Glied der obigen Polynomialformel ist, welches $\alpha^p\beta^q$ enthält.

Setzt man 3) $z = d + \ldots$, so wird $y^{n-p-q} = (\gamma + z)^{n-p-q}$; und es ist das allgemeine Glied der Entwicklung dieses Binoms, welches γ^r enthält,

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-p-q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-p-q-r)} \gamma^r z^{n-p-q-r}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck anstatt y^{n-p-q} in (II), so erhält man

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-p-q)}{1.2..p \times 1.2..q \times 1.2..(n-p-q) \times 1.2 \,.\, r \times 1.2..(n-p-q-r)} \alpha^p \beta^q \gamma^r z^{n-p-q-r}$$

$$\text{(III)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q \times 1.2.3 \ldots r \times 1.2.3 \ldots (n-p-q-r)} \alpha^p \beta^q \gamma^r z^{n-p-q-r},$$

welcher Ausdruck somit offenbar das allgemeine Glied der obigen Polynomialformel ist, welches $\alpha^p\beta^q\gamma^r$ enthält.

Nach dem Vorhergehenden ist nunmehr das allgemeine Glied der Formel

$$(\alpha + \beta + \gamma)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n,$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \alpha^p \beta^q \gamma^r,$$

wenn p, q, r beliebige ganze positive Zahlen bezeichnen, und $p + q + r = n$; ferner das allgemeine Glied der Formel

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n + \ldots + \delta^n_3$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s} \alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s,$$

wenn p, q, r, s beliebige ganze positive Zahlen bezeichnen, und

$$p + q + r + s = n;$$

überhaupt das allgemeine Glied der Formel

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n + \ldots + \delta^n + \ldots$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q \times 1.2.3 \ldots r \times 1.2.3 \ldots s \times \ldots} \alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s \ldots,$$

wenn p, q, r, s... beliebige ganze positive Zahlen bezeichnen und

$$p + q + r + s + \ldots = n.$$

§. 70.

Ueberhaupt sind endlich alle Ausdrücke zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit, welche sich beim n maligen Anstellen eines und desselben Versuches ergeben, wenn sich derselbe auf die Ereignisse A, B, C, D, ... erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten respective α, β, γ, δ... ausdrücken, in folgender Formel enthalten:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n + \ldots + \delta^n + \ldots$$

worin, wenn $p + q + r + s + \ldots = n$, das allgemeine Glied

$$= \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,n}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots r \times 1.2.3\ldots s \times \ldots}\alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^s\ldots$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrückt, daß unter diesen n Versuchen die Ereignisse A, B, C, D,... in einer beliebigen Ordnung unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen und zwar A p mal, B q mal, C r mal, D s mal, ..., und $\alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^s\ldots$ die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrückt, daß unter diesen n Versuchen die Ereignisse A, B, C, D, ... in einer vorgeschriebenen Ordnung unmittelbar auf einander folgen oder zusammentreffen und zwar A p mal, B q mal, C r mal, D s mal, ... *

---

* Wie früher schon bemerkt wurde, läßt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses häufig auf verschiedene Weise betrachten und berechnen (§. 64, 4); die drei Auflösungen der folgenden Aufgabe liefern einen weitern Beleg hiefür.

Aufgabe. Man wirft ein breites, sehr dünnes Stück Geld in die Luft, dessen beide große einander entgegengesetzte Seiten, von denen die eine Kopf, die andere Wappen heißen möge, vollkommen ähnlich sind. Wie wahrscheinlich ist es, in zwei Würfen den Kopf wenigstens einmal oben hin zu bringen?

1. Auflösung nach der einfachen Wahrscheinlichkeit:

Bei den zwei Würfen können oben hin kommen 1) Kopf und Kopf, oder 2) Kopf und Wappen, oder 3) Wappen und Kopf, oder 4) Wappen und Wappen. Da nun von diesen vier gleich möglichen Fällen die drei ersten dem in Frage stehenden Ereignisse günstig sind, so beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$.

2. Auflösung nach der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit:

Das in Frage stehende Ereigniß trifft zu, wenn der Kopf entweder gleich beim ersten Wurfe, oder nicht beim ersten Wurfe und hierauf beim zweiten Wurfe oben hinkommt.

Nun ist 1) die Wahrscheinlichkeit, daß der Kopf gleich beim ersten Wurfe oben hinkommt, $= \frac{1}{2}$; 2) die Wahrscheinlichkeit, daß der Kopf

Angewandte Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Versuchen nebst den Auflösungen.

§. 71.

Aufgabe 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel unter vier Würfen a) die Zahl 6 viermal, b) die Zahl 6 gerade zweimal, c) die Zahl 6 wenigstens zweimal, d) die Zahl 6 höchstens zweimal zu werfen?

Auflösung. Da es sich hier um das viermalige Anstellen eines und desselben Versuches handelt, welcher sich auf zwei Ereignisse erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten respective α und β ausdrücken mögen, so sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten in folgender Formel enthalten:

$$(\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4 \text{ (§. 67).}$$

a) Nun ist die einfache Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel die Zahl 6 zu werfen, $\alpha = \frac{1}{6}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 6 nicht zu werfen, $\beta = \frac{5}{6}$; also die Wahrscheinlichkeit, unter vier Würfen viermal die Zahl 6 zu werfen,

$$\alpha^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}.$$

b) Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, unter vier Würfen die Zahl 6 zweimal zu werfen und also zweimal nicht zu werfen,

$$6\,\alpha^2\beta^2 = 6\,.\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}.$$

---

nicht beim ersten Wurfe und hierauf beim zweiten Wurfe oben hinkommt, $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

3. Auflösung nach den wiederholten Versuchen:

Da es sich hier um das zweimalige Anstellen eines und desselben Versuches handelt, welcher sich auf zwei Ereignisse erstreckt, dessen einfache Wahrscheinlichkeiten α und β ausdrücken mögen, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit in folgender Formel enthalten:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

Nun ist die einfache Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf den Kopf oben hin zu bringen, $\alpha = \frac{1}{2}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, das Wappen oben hinzubringen, $\beta = \frac{1}{2}$; also die Wahrscheinlichkeit, in zwei Würfen den Kopf wenigstens einmal, d. h. entweder zwei-, oder einmal, oben hin zu bringen,

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta = (\tfrac{1}{2})^2 + 2\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}.$$

c) Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, unter vier Würfen die Zahl 6 wenigstens zweimal, d. h. entweder zwei-, drei-, oder viermal, zu werfen,

$$\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= \frac{1 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2}{6^4} = \frac{19}{144}.$$

d) Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, unter vier Würfen die Zahl 6 höchstens zweimal, d. h. entweder zweimal, einmal oder gar nicht, zu werfen,

$$6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$= \frac{6 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 5^4}{6^4} = \frac{425}{432}.$$

Aufgabe 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Spiele mit zwei Würfeln unter drei Würfen a) die Summe 10 dreimal, b) die Summe 9 gerade zweimal, c) die Summe 8 wenigstens einmal, d) die Summe 7 höchstens einmal zu werfen?

Auflösung. In der vorliegenden Aufgabe handelt es sich um das dreimalige Anstellen eines und desselben Versuches, welcher sich auf zwei Ereignisse erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten α und β ausdrücken mögen, und es sind daher die verlangten Wahrscheinlichkeiten in folgender Formel enthalten:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \text{ (§. 66).}$$

a) Nun ist die einfache Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 10 zu werfen, $\alpha = \frac{1}{12}$; also die Wahrscheinlichkeit, unter drei Würfen dreimal die Summe 10 zu werfen,

$$\alpha^3 = \left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}.$$

b) Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 9 zu werfen, $\alpha = \frac{1}{9}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, die Summe 9 nicht

zu werfen, $\beta = \frac{8}{9}$; daher die Wahrscheinlichkeit, unter drei Würfen die Summe 9 zweimal zu werfen und also einmal nicht zu werfen,

$$3\alpha^2\beta = 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{243}.$$

c) Ferner ist die einfache Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 8 zu werfen, $\alpha = \frac{5}{36}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, die Summe 8 nicht zu werfen, $\beta = \frac{31}{36}$; daher die Wahrscheinlichkeit, unter drei Würfen die Summe 8 wenigstens einmal, d. h. entweder drei-, zwei-, oder einmal, zu werfen,

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$$
$$= \left(\frac{5}{36}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^2 \cdot \frac{31}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{31}{36}\right)^2$$
$$= \frac{5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 31 + 3 \cdot 5 \cdot 31^2}{36^3} = \frac{16865}{46656}$$

oder ungefähr $\frac{4}{11}$.

d) Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 7 zu werfen, $\alpha = \frac{1}{6}$ und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 nicht zu werfen, $\beta = \frac{5}{6}$; daher die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 höchstens einmal, d. h. entweder einmal, oder gar nicht, zu werfen,

$$3\alpha\beta^2 + \beta^3 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3$$
$$= \frac{3 \cdot 5^2 + 5^3}{6^3} = \frac{25}{27}.$$

Aufgabe 3. Wie wahrscheinlich ist es, beim Spiele mit drei Würfeln unter sechs Würfen a) zweimal eine Terne, d. h. drei gleiche Augen und nicht weniger, b) einmal einen Pasch, d. h. zwei gleiche Augen, weder mehr, noch weniger, zu werfen?

Auflösung. Es handelt sich hier um die mehrmalige Wiederholung eines und desselben Versuches, welcher sich auf zwei

Ereignisse erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten α und β ausdrücken mögen, und es finden sich daher die gesuchten Wahrscheinlichkeiten in folgender Formel:

$$(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + \ldots . + \beta^n,$$

deren allgemeines Glied

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{1 . 2 . 3 \ldots m \times 1 . 2 . 3 \ldots (n-m)} \alpha^m \beta^{n-m} \text{ (§. 68).}$$

a) Nun ist die einfache Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln auf einen Wurf eine Terne zu werfen, $\alpha = \frac{1}{36}$ (§. 64, Aufg. 2), und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, keine Terne zu werfen, $\beta = \frac{35}{36}$; daher die Wahrscheinlichkeit, unter sechs Würfen zweimal eine Terne und also viermal keine Terne zu werfen,

$$\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}{1 . 2 \times 1 . 2 . 3 . 4} \alpha^2 \beta^4 = 15 . \left(\frac{1}{36}\right)^2 . \left(\frac{35}{36}\right)^4$$

$$= \frac{7503125}{725594112} \text{ oder ungefähr } \frac{1}{97}.$$

b) Es ist ferner die einfache Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln auf einen Wurf einen Pasch zu werfen, $\alpha = \frac{5}{12}$ (§. 64, Aufg. 2), und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, keinen Pasch zu werfen, $\beta = \frac{7}{12}$; daher die Wahrscheinlichkeit, unter sechs Würfen einmal einen Pasch und also fünfmal keinen Pasch zu werfen,

$$\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}{1 \times 1 . 2 . 3 . 4 . 5} \alpha \beta^5 = 6 . \frac{5}{12} . \left(\frac{7}{12}\right)^5$$

$$= \frac{84035}{497664} \text{ oder ungefähr } \frac{1}{6}.$$

Aufgabe 4. In einer Urne befinden sich 2 weiße und 3 schwarze Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter sieben Zügen von je zwei Kugeln, nach deren jedem die zwei gezogenen Kugeln wieder in die Urne gelegt werden, a) einmal zwei weiße, b) dreimal zwei schwarze Kugeln zu erhalten?

Auflösung. Da es sich in der vorliegenden Aufgabe um die mehrmalige Wiederholung eines und desselben Versuches handelt,

welcher sich auf zwei Ereignisse erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten α und β ausdrücken mögen, so finden sich die verlangten Wahrscheinlichkeiten in folgender Formel:

$$(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + \ldots\ldots + \beta^n,$$

deren allgemeines Glied

$$= \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-m)} \alpha^m \beta^{n-m} \quad (\S.\ 68).$$

a) Nun ist die einfache Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug aus der Urne zwei weiße Kugeln zu ziehen, $\alpha = \frac{1}{10}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, keine zwei weiße Kugeln aus der Urne zu ziehen, $\beta = \frac{9}{10}$; daher die Wahrscheinlichkeit, unter sieben Zügen einmal zwei weiße und also sechsmal keine zwei weiße Kugeln zu ziehen,

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7}{1 \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} \alpha \beta^6 = 7 \,.\, \frac{1}{10} \,.\, \left(\frac{9}{10}\right)^6$$

$$= \frac{3720087}{10000000} \text{ oder ungefähr } \frac{3}{8}.$$

b) Es ist ferner die einfache Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug aus der Urne zwei schwarze Kugeln zu erhalten, $\alpha = \frac{3}{10}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit, keine zwei schwarze Kugeln zu ziehen, $\beta = \frac{7}{10}$; daher die Wahrscheinlichkeit, unter sieben Zügen dreimal zwei schwarze und also viermal keine zwei schwarze Kugeln zu ziehen,

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \alpha^3 \beta^4 = 35 \,.\, \left(\frac{3}{10}\right)^3 \,.\, \left(\frac{7}{10}\right)^4$$

$$= \frac{2268945}{10000000} \text{ oder ungefähr } \frac{2}{9}.$$

Aufgabe 5. In einer Urne befinden sich 3 weiße, 4 schwarze und 5 rothe Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter sechs Zügen, nach deren jedem die gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt wird, a) 2 weiße, 2 schwarze und 2 rothe Kugeln in einer beliebigen Ordnung, b) zuerst 2 weiße, hierauf 2 schwarze und zuletzt 2 rothe Kugeln zu erhalten?

Auflösung. Es handelt sich hier um die mehrmalige Wiederholung eines und desselben Versuches, welcher sich auf drei Ereignisse erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten respective α, β, γ ausdrücken mögen, und es finden sich daher die gesuchten Wahrscheinlichkeiten in folgender Formel:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n,$$

worin, wenn $p + q + r = n$, das allgemeine Glied

$$= \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p \times 1\,.\,2\,.\,3\ldots q \times 1\,.\,2\,.\,3\ldots r}\alpha^p\beta^q\gamma^r \text{ (§. 69).}$$

a) Nun ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug aus der Urne eine weiße Kugel zu ziehen, $\alpha = \frac{1}{4}$, die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, $\beta = \frac{1}{3}$, die Wahrscheinlichkeit, eine rothe Kugel zu ziehen, $\gamma = \frac{5}{12}$; daher die Wahrscheinlichkeit, unter sechs Zügen 2 weiße, 2 schwarze und 2 rothe Kugeln in einer beliebigen Ordnung zu erhalten,

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2 \times 1\,.\,2 \times 1\,.\,2}\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 90\,.\left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2.\left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{125}{1152}.$$

b) Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, unter sechs Zügen 2 weiße, 2 schwarze und 2 rothe Kugeln in dieser vorgeschriebenen Ordnung zu ziehen,

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2.\left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{20736}.$$

Aufgabe 6. In einer Urne befinden sich 4 weiße, 4 schwarze, 4 rothe und 4 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter acht Zügen, nach deren jedem die gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt wird, a) 2 weiße, 2 schwarze, 2 rothe und 2 blaue Kugeln in einer beliebigen Ordnung, b) zuerst 2 weiße, hierauf 2 schwarze, sodann 2 rothe und zuletzt 2 blaue Kugeln zu erhalten?

Auflösung. Da es sich hier um die mehrmalige Wiederholung eines und desselben Versuches handelt, welcher sich auf vier Ereignisse erstreckt, deren einfache Wahrscheinlichkeiten respective α, β, γ, δ ausdrücken mögen, so sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten in folgender Formel enthalten:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^n = \alpha^n + \ldots + \beta^n + \ldots + \gamma^n + \ldots + \delta^n,$$

worin, wenn $p + q + r + s = n$, das allgemeine Glied

$$= \frac{1.2.3....n}{1.2.3...p \times 1.2.3...q \times 1.2.3...r \times 1.2.3...s} \alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s \text{ (§. 70).}$$

a) Nun ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug aus der Urne eine weiße Kugel zu ziehen, $\alpha = \frac{1}{4}$, die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, $\beta = \frac{1}{4}$, die Wahrscheinlichkeit, eine rothe Kugel zu ziehen, $\gamma = \frac{1}{4}$ und die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, $\delta = \frac{1}{4}$; daher die Wahrscheinlichkeit, unter acht Zügen 2 weiße, 2 schwarze, 2 rothe und 2 blaue Kugeln in einer beliebigen Ordnung zu ziehen,

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2 \times 1.2 \times 1.2 \times 1.2} \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta^2$$

$$= 2520 . \left(\frac{1}{4}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{315}{8192} \text{ oder ungefähr } \frac{1}{26}.$$

b) Ferner ist nach dem Vorhergehenden die Wahrscheinlichkeit, unter acht Zügen 2 weiße, 2 schwarze, 2 rothe und 2 blaue in dieser vorgeschriebenen Ordnung zu ziehen,

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{65536} *.$$

---

* Wir entnehmen aus Laplace's Essai philosophique sur les Probabilités folgende historische Notizen über die Wahrscheinlichkeits-Rechnung:

Schon seit langer Zeit bestimmte man bei einfachen Spielen die Verhältnisse der den Spielern günstigen und ungünstigen Fälle, und richtete hiernach die Einsätze und Wetten ein. Allein vor Pascal (geboren zu Clermont in der Auvergne 1623, gestorben zu Paris 1662) und Fermat gab es weder Grundsätze, noch Methoden dieser Rechnung, auch waren noch keine schwierigen Aufgaben der Art aufgelöst worden. Diesen beiden Geometern verdankt man die ersten Grundlehren der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, deren Entdeckung zu den Merkwürdigkeiten gezählt werden kann, welche das siebenzehnte Jahrhundert berühmt gemacht haben. Die wichtigste Aufgabe, welche sie auf verschiedenen Wegen zuerst auflösten, bestand darin, das, was auf dem Spiele steht, unter die Spieler von gleicher Geschicklichkeit rechtlich zu vertheilen, wenn die Spieler übereinkommen, eine angefangene

Partie aufzugeben, noch ehe sie ausgespielt ist, und festsetzen, daß derjenige die ganze Partie gewinnt, welcher zuerst eine gegebene Anzahl von Spielen gewonnen hat. Die Auflösung von Pascal ist sehr sinnreich, jedoch nicht so allgemein als die von Fermat.

Huyghens (geboren zu Haag 1629, gestorben 1695) sammelte die verschiedenen schon gelösten Aufgaben, vermehrte dieselben um einige neue, und gab sie unter folgendem Titel heraus: Tractatus de ratiociniis in ludo aleae.

In der Folge beschäftigten sich mehrere Geometer mit der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, Huddes, Witt, Halley, und wandten diese Rechnung auf die Wahrscheinlichkeit des menschlichen Lebens an. Halley (geboren zu London 1656, gestorben 1742) machte dazu die erste Sterblichkeitstabelle bekannt.

Um dieselbe Zeit gab Jacob Bernoulli (geboren zu Basel 1654, gestorben 1705) den Geometern verschiedene Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf, zu welchen er später die Auflösungen selbst lieferte. Endlich schrieb er sein schönes Werk, Ars conjectandi, welches aber erst nach seinem Tode herauskam. Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung wird in diesem Werke weit mehr ergründet, als in dem von Huyghens. Der Verfasser gibt darin eine allgemeine Theorie der Combinationen und Reihen, und wendet sie auf mehrere schwierige Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeits-Rechnung an. Dieses Werk ist durch die Richtigkeit und Feinheit der Ansichten, durch den Gebrauch der Binomialformel bei dieser Art Aufgaben und namentlich auch durch den Beweis des Lehrsatzes merkwürdig, daß, wenn sich die Beobachtungen und Erfahrungen unbestimmt vervielfältigen, das Verhältniß verschiedenartiger Begebenheiten sich dem Verhältnisse ihrer gegenseitigen Möglichkeiten innerhalb solcher Grenzen nähert, deren Zwischenraum immermehr abnimmt, je mehr sie sich vervielfältigen, und kleiner wird als jede anzugebende Größe. Nach diesem Satze kann man durch Beobachtungen die Gesetze und Ursachen der Erscheinungen kennen lernen.

In der Zwischenzeit vom Tode Jacob Bernoulli's bis zur Bekanntmachung seines Werkes gaben Montmort (geboren zu Paris 1678, gestorben 1719) und Moivre (geboren zu Vitri in Frankreich 1667, gestorben zu London 1754) jeder eine Abhandlung über die Wahrscheinlichkeits-Rechnung heraus. Die Schrift von Montmort (Essai sur les jeux de hasard) enthält zahlreiche Anwendungen auf die verschiedenen Spiele. Die zweite Auflage derselben wurde durch die Aufnahme einiger Briefe vermehrt, in welchen Nikolaus Bernoulli (Neffe des Jacob Bernoulli, geboren zu Basel 1695, gestorben zu Petersburg 1726) scharfsinnige Auflösungen von mehreren schwierigen Aufgaben liefert. Moivre's Abhandlung erschien nach der von Montmort und zwar zuerst in den philosophischen Transactionen von 1711. Hierauf gab sie der Verfasser besonders heraus und vervollkommnete sie nach und nach in drei Auflagen. Dieses Werk gründet sich vorzüglich auf die Binomialformel, und die darin vorkommenden Aufgaben sind nebst

deren Auflösungen sehr allgemein. Es enthält überdieß die Theorie der recurrirenden Reihen und deren Gebrauch in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

In dasselbe Werk hat Moivre auch den oben angeführten Lehrsatz von Jacob Bernoulli aufgenommen. Er begnügte sich aber nicht damit, wie J. Bernoulli, zu zeigen, daß sich das Verhältniß der Begebenheiten, welche vorfallen werden, dem Verhältnisse ihrer gegenseitigen Möglichkeiten unaufhörlich nähert, sondern gab außerdem noch einen eleganten und einfachen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, daß der Unterschied dieser beiden Verhältnisse in gegebenen Grenzen enthalten sey.

Mehrere Gelehrte, von denen Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maure, Simpson (geboren zu Leicestershire 1710, gestorben 1761), Süssmilch, Messère, Moheau, Price und Duvillard besonders anzuführen sind, haben eine große Anzahl schätzbarer Data über Bevölkerung, Geburten, Ehen und Sterblichkeit gesammelt. Wir beschränken uns jedoch auf diese kurze Anzeige, und gehen nun zu originellen Ideen über.

Dahin gehört die Unterscheidung der mathematischen und moralischen Hoffnung, sowie der scharfsinnige Grundsatz von Daniel Bernoulli (Neffe des Jacob Bernoulli, geboren zu Gröningen 1700, gestorben zu Basel 1782), letztere der Analysis zu unterwerfen; ferner die glückliche Anwendung, welche D. Bernoulli von dem Wahrscheinlichkeits-Calcul auf die Einimpfung der Blattern gemacht hat; endlich noch insbesondere die directe Betrachtung der aus den beobachteten Ereignissen geschlossenen Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten. Jacob Bernoulli und Moivre setzten diese Wahrscheinlichkeit als bekannt voraus und suchten die Wahrscheinlichkeit, daß das Resultat der zu machenden Erfahrungen immer mehr und mehr dahin kommen werde, sie darzustellen. Boyes suchte in den philosophischen Transactionen von 1763 direct die Wahrscheinlichkeit, daß die durch schon gemachte Erfahrungen angezeigten Möglichkeiten in gegebenen Grenzen enthalten seyen, und gelangte dahin auf eine sehr feine und sinnreiche, obgleich etwas complicirte Weise. Dieser Gegenstand schließt sich wieder an die Theorie der aus beobachteten Ereignissen gefolgerten Wahrscheinlichkeit der Ursachen und zukünftigen Begebenheiten an. Laplace (geboren zu Beaumont en Auge 1749, gestorben zu Paris 1827) hat einige Jahre später die Grundsätze derselben dargestellt, mit Berücksichtigung des Einflusses der Ungleichheiten, welche zwischen den für gleich gehaltenen Fällen stattfinden können.

Durch Verallgemeinerung der Analysis und der Aufgaben über Wahrscheinlichkeiten kam Laplace auf die Rechnung mit partiellen endlichen Differenzen, welche Lagrange bald darauf nach einer sehr einfachen Methode behandelte und auf eine elegante Weise zur Anwendung brachte.

Man hat auch die Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse, die Meinungen und Entscheidungen wählender und berathschlagender Versammlungen, sowie die Urtheile der Gerichte schon berechnet; Leidenschaften, verschiedene Interessen und sonstige Umstände verwickeln aber die der Art Gegenstände betreffenden Fragen so sehr, daß sie fast immer unauflösbar sind. Dessen

ungeachtet kann die Auflösung einfacher Aufgaben, welche mit den eigentlich gegebenen viel Analoges haben, häufig über solche schwierige und wichtige Fragen großes Licht verbreiten, was, wegen der Sicherheit des Calculs, den scheinbar sehr gegründeten Vernunftschlüssen vorzuziehen ist.

Eine der interessantesten Anwendungen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung betrifft die Mittel, welche zwischen den Resultaten der Beobachtungen genommen werden müssen. Mit diesem Gegenstande haben sich in der neuesten Zeit die größten Geometer beschäftigt, namentlich Lagrange, Laplace, Legendre und Gauss, und hiefür ebenso scharfsinnige, als elegante analytische Methoden aufgefunden. Legendre und Gauss verdankt man die Theorie der kleinsten Quadrate und Laplace das gediegenste Werk (Theorie analytique des Probabilités), welches je über die Wahrscheinlichkeits-Rechnung geschrieben worden ist. Dasselbe enthält die Grundsätze und Analysis der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf die allgemeinste und vollständigste Weise dargestellt, sowie die Auflösungen der interessantesten und schwierigsten Aufgaben dieses Calculs.

2. Laplace spricht sich (in seinem Essai philosophique sur les Probabilités) folgendermaßen über die Wichtigkeit der Wahrscheinlichkeits-Rechnung aus:

„Die Theorie der Wahrscheinlichkeiten ist im Grunde nichts weiter, als der in Rechnung gebrachte gesunde Menschenverstand; sie lehrt das mit Genauigkeit bestimmen, was ein richtiger Verstand durch eine Art Instinkt fühlt, ohne sich immer Rechenschaft davon zu geben. Betrachtet man die analytischen Methoden, welche erst durch diese Theorie entstanden sind, die Wahrheit der Grundsätze, auf welchen sie beruht, die scharfe und genaue Logik, welche ihr Gebrauch bei der Auflösung der Aufgaben erfordert, den Nutzen der auf sie gegründeten Anstalten und die Ausdehnung, welche sie durch ihre Anwendung auf die wichtigsten Aufgaben der Philosophie und der moralischen Wissenschaften schon erhalten hat und noch erhalten kann, und berücksichtigt zugleich, daß sie selbst bei Gegenständen, welche sich nicht berechnen lassen, die richtigsten Ansichten verschafft, welche die Urtheile darüber leiten können, so wird man einsehen, daß keine Wissenschaft des Nachdenkens würdiger ist und mit mehr Nutzen in das System des öffentlichen Unterrichts aufgenommen werden kann.“

Fünfte Abhandlung.

Die höheren arithmetischen und geometrischen Reihen.

Begriff der höheren arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 72.

Von den arithmetischen und geometrischen Progressionen lassen sich durch die Addition, Subtraction, Multiplication, Division, das Potenziren und Radiciren der Glieder unendlich viele andere Reihen herleiten, deren aufeinanderfolgende Glieder, wie die der arithmetischen und geometrischen Progressionen, nach bestimmten Gesetzen fortlaufen. Man nennt diese Reihen **höhere arithmetische und geometrische Reihen**, indeß die arithmetischen und geometrischen Progressionen, von welchen sie abgeleitet werden, **einfache arithmetische und geometrische Reihen** oder **arithmetische und geometrische Grundreihen** * heißen.

---

* 1. Bezeichnet a das erste Glied, δ die Differenz, n die Anzahl aller Glieder, l das nte (allgemeine oder letzte) Glied, s die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression, so hat diese folgende Form:

$$\div \overset{1.}{a} \,.\, \overset{2.}{a + \delta} \,.\, \overset{3.}{a + 2\delta} \ldots \overset{n.}{a + (n-1)\delta};$$

und es ist

$$\text{I. } l = a + (n-1)\delta,$$

$$\text{II. } s = (a + l)\frac{n}{2}.$$

Sind von den fünf Größen a, δ, n, l, s drei bekannt, so läßt sich mittelst der vorhergehenden zwei Grundformeln stets jede der beiden unbekannten Größen nach folgender Regel finden:

Man sehe, ob die drei gegebenen Größen mit der zu suchenden Größe in einer und derselben Grundformel enthalten sind, oder nicht. Befinden sich alle in einer und derselben Grundformel, so suche man die unbekannte Größe unmittelbar aus

Wir werden nun die wichtigsten Aufgaben über diejenigen dieser höheren Reihen, welche am häufigsten eine Anwendung finden, folgen lassen und auflösen.

---

dieser Grundformel; befinden sich aber nicht alle in einer und derselben Grundformel, so nehme man den Werth der Größe, welche unter den vier betreffenden Größen nicht vorkommt, aus einer der beiden Grundformeln, substituire denselben in der andern Grundformel, und suche sofort aus dieser die unbekannte Größe.

Zur Anwendung dieser Regel wollen wir nun die schwierigsten Fälle, welche hiebei vorkommen können, auflösen und hierauf die Resultate aller 20 Fälle, welche überhaupt möglich sind, in einer Tabelle nachfolgen lassen.

Aufgabe 1. Es seyen a, δ, s gegeben, und n soll gesucht werden.

Auflösung. Da a, δ, s, n nicht alle in einer und derselben Grundformel enthalten sind, so substituiren wir den Werth von l aus der Grundformel I. in die Grundformel II., und erhalten

$$\text{I. } l = a + (n-1)\delta$$

$$\text{und II. } s = [2a + (n-1)\delta]\frac{n}{2}$$

$$2s = 2an + \delta n^2 - \delta n$$

$$\delta n^2 + (2a-\delta)n = 2s$$

$$n^2 + \frac{2a-\delta}{\delta}\cdot n = \frac{2s}{\delta}$$

$$n = -\frac{2a-\delta}{2\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{2a-\delta}{2\delta}\right)^2 + \frac{2s}{\delta}}$$

$$\text{oder } n = \frac{\delta-2a \pm \sqrt{(d-2a)^2 + 8\delta s}}{2\delta}.$$

Aufgabe 2. Es seyen a, δ, s gegeben, und l soll gesucht werden.

Auflösung. Wir substituiren den Werth von n aus der Grundformel II. in die Grundformel I., und erhalten

$$\text{aus II. } n = \frac{2s}{a+l}$$

$$\text{und I. } l = a + \left(\frac{2s}{a+l} - 1\right)\delta$$

$$al + l^2 = a^2 + al + (2s - a - l)\delta$$

$$l^2 = a^2 + 2\delta s - a\delta - \delta l$$

$$l^2 + \delta l = a^2 + 2\delta s - a\delta$$

$$l = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + a^2 + 2\delta s - a\delta}$$

$$\text{oder } l = \frac{-\delta \pm \sqrt{(\delta-2a)^2 + 8\delta s}}{2}.$$

Reihen gleich hoher Potenzen, welche auf die Glieder einer arithmetischen Progression gebaut sind.

§. 73.

Aufgabe. Man verlangt das allgemeine Glied der Reihe

$$a^m,\ b^m,\ c^m,\ \ldots\ldots\ i^m,\ k^m,\ l^m,$$

wenn $\div \overset{1.}{a} \,.\, \overset{3.}{b} \,.\, \overset{3.}{c} \,.\ldots.\, \overset{n-2.}{i} \,.\, \overset{n-1.}{k} \,.\, \overset{n.}{l}.$

Auflösung. In der arithmetischen Progression

$$\div\ a\,.\,b\,.\,c\,.\ldots.\,i\,.\,k\,.\,l$$

ist $l = a + (n-1)\delta,$

Aufgabe 3. Es seyen l, δ, s gegeben, und n soll gesucht werden.

Auflösung. Da l, δ, s, n nicht alle in einer und derselben Grundformel enthalten sind, so substituiren wir den Werth von a aus der Grundformel I. in die Grundformel II., und erhalten

$$\text{aus I. } a = l - (n-1)\delta$$

$$\text{und II. } s = [2l - (n-1)\delta]\frac{n}{2}$$

$$2s = 2ln - \delta n^2 + \delta n$$

$$\delta n^2 - (\delta + 2l)n = -2s$$

$$n^2 - \frac{\delta + 2l}{\delta} \,.\, n = -\frac{2s}{\delta}$$

$$n = \frac{\delta + 2l}{2\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta + 2l}{2\delta}\right)^2 - \frac{2s}{\delta}}$$

$$\text{oder } n = \frac{\delta + 2l \pm \sqrt{(\delta + 2l) - 8\delta s}}{2\delta}.$$

Aufgabe 4. Es seyen l, δ, s gegeben, und a soll gesucht werden.

Auflösung. Wir substituiren den Werth von n aus der Grundformel II. in die Grundformel I., und erhalten

$$\text{aus II. } n = \frac{2s}{a + l}$$

$$\text{und I. } l = a + \left(\frac{2s}{a + l} - 1\right)\delta$$

$$al + l^2 = a^2 + al + 2\delta s - a\delta - \delta l$$

$$a^2 - a\delta = l^2 + \delta l - 2\delta s$$

$$a = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + l^2 + \delta l - 2\delta s}$$

$$\text{oder } a = \frac{\delta \pm \sqrt{(\delta + 2l)^2 - 8\delta s}}{2}.$$

wenn δ die Differenz der Progression bezeichnet;

also $l^m = [a + (n-1)\delta]^m$.

Formeltafel für die arithmetischen Progressionen.

Nro.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
1.	a, δ, n	l	$l = a + (n-1)\delta$,
2.	a, δ, s	l	$l = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{2\delta s + \left(a - \frac{\delta}{2}\right)^2}$,
3.	a, n, s	l	$l = \frac{2s}{n} - a$,
4.	δ, n, s	l	$l = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)\delta}{2}$.
5.	a, δ, n	s	$s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\delta]$,
6.	a, δ, l	s	$s = \frac{a+l}{2} + \frac{(l+a)(l-a)}{2\delta}$,
7.	a, n, l	s	$s = \frac{n}{2}(a+l)$,
8.	δ, n, l	s	$s = \frac{n}{2}[2l - (n-1)\delta]$.
9.	a, n, l	δ	$\delta = \frac{l-a}{n-1}$,
10.	a, n, s	δ	$\delta = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$,
11.	a, l, s	δ	$\delta = \frac{(l+a)(l-a)}{2s - l - e}$,
12.	n, l, s	δ	$\delta = \frac{2nl - 2s}{n(n-1)}$.
13.	a, δ, l	n	$n = 1 + \frac{l-a}{\delta}$,
14.	a, δ, s	n	$n = \frac{\delta - 2a}{2\delta} \pm \sqrt{\frac{2s}{\delta} + \left(\frac{2a-\delta}{2\delta}\right)^2}$,
15.	a, l, s	n	$n = \frac{2s}{a+l}$,
16.	δ, l, s	n	$n = \frac{2l+\delta}{2\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{2l+\delta}{2\delta}\right)^2 - \frac{2s}{\delta}}$.

§. 74.

Aufgabe. Man verlangt die Summe der Reihe

$$a^m, b^m, c^m, \ldots i^m, k^m, l^m,$$

$$\text{wenn } \div \overset{1.}{a} . \overset{2.}{b} . \overset{3.}{c} \ldots . \overset{n-2.}{i} . \overset{n-1.}{k} . \overset{n.}{l} .$$

Nro.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
17.	δ, n, l	a	$a = l - (n-1)\delta,$
18.	δ, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\delta}{2},$
19.	δ, l, s		$a = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{\delta}{2}\right)^2 - 2\delta s},$
20.	n, l, s		$a = \frac{2s}{n} - l.$

2. Bezeichnet a das erste Glied, e den Exponenten, n die Anzahl aller Glieder, l das nte (allgemeine oder letzte) Glied, s die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression, so hat diese folgende Form:

$$\div\div \overset{1.}{a} : \overset{2.}{ae} : \overset{3.}{ae^2} \ldots\ldots \overset{n.}{ae^{n-1}};$$

und es ist I. $l = ae^{n-1}$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{II. } s = \dfrac{a(e^n-1)}{e-1} \\ \text{oder III. } s = \dfrac{le-a}{e-1}. \end{array}\right\}$$

Sind von den fünf Größen a, e, n, l, s drei bekannt, so gilt stets folgende Regel für das Suchen einer jeden der beiden unbekannten Größen:

Man sehe, ob die drei gegebenen Größen mit der zu suchenden Größe in einer und derselben Grundformel enthalten sind, oder nicht. Befinden sich alle in einer und derselben Grundformel, so suche man die unbekannte Größe unmittelbar aus dieser Grundformel; befinden sich aber nicht alle in einer und derselben Grundformel, so substituire man den Werth der Größe, welche unter den vier betreffenden Größen nicht vorkommt, entweder aus der Grundformel I. in eine der Grundformeln II. oder III., oder aus einer der Grundformeln II. oder III. in die Grundformel I., rc. Die letzte Substitution, nämlich die aus der Grundformel III. in die Grundformel I., führt gewöhnlich am einfachsten und schnellsten zum Ziele.

Zur Anwendung dieser Regel wollen wir nun die schwierigsten Fälle, welche hiebei vorkommen können, auflösen und hierauf die Resultate aller

Auflösung. Bezeichnet δ die Differenz der arithmetischen Progression :

---

20 Fälle, welche überhaupt möglich sind, in einer Tabelle nachfolgen lassen.

Aufgabe 1. Es seyen a, n, s gegeben, und l soll gesucht werden.

Auflösung. Da a, n, s, l nicht alle in einer und derselben Grundformel vorkommen, so substituiren wir den Werth von e aus der Grundformel III. in die Grundformel I., und erhalten

$$\text{aus III. } e = \frac{s-a}{s-l}$$

$$\text{und I. } l = a\left(\frac{s-a}{s-l}\right)^{n-1}$$

$$l(s-l)^{n-1} = a(s-a)^{n-1}$$

$$l(s-l)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0,$$

eine Gleichung vom nten Grade.

Aufgabe 2. Es seyen a, n, s gegeben, und e soll gesucht werden.

Auflösung. a, n, s, e kommen alle in der Grundformel II. vor, woraus wir erhalten

$$\text{II. } \frac{s}{a} = \frac{e^n-1}{e-1}$$

$$\frac{s}{a} = e^{n-1} + e^{n-2} + \ldots + e + 1$$

$$e^{n-1} + e^{n-2} + \ldots + e + 1 - \frac{s}{a} = 0,$$

eine Gleichung vom n—1ten Grade.

Aufgabe 3. Es seyen l, n, s gegeben und e soll gesucht werden.

Auflösung. Wir substituiren den Werth von a aus der Grundformel I. in die Grundformel II., und erhalten

$$\text{aus I. } a = \frac{l}{e^{n-1}}$$

$$\text{und II. } s = \frac{l}{e^{n-1}} \times \frac{e^n-1}{e-1}$$

$$s = \frac{l}{e^{n-1}}(e^{n-1} + e^{n-2} + \ldots + e + 1)$$

$$\frac{s}{l} = 1 + \frac{1}{e} + \ldots + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{1}{e} + 1 - \frac{s}{l} = 0,$$

eine Gleichung vom n—1ten Grade.

Aufgabe 4. Es seyen l, n, s gegeben, und a soll gesucht werden.

Auflösung. Wir substituiren den Werth von e aus der Grundformel III. in die Grundformel I., und erhalten

$$\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ .\ .\ .\ i\ .\ k\ .\ l,$$

so ist nach dem binomischen Lehrsatze:

$$\text{aus III.}\quad e = \frac{s-a}{s-l}$$

$$\text{und I.}\quad l = a\left(\frac{s-a}{s-l}\right)^{n-1}$$

$$l(s-l)^{n-1} = a(s-a)^{n-1}$$

$$a(s-a)^{n-1} - l(s-l)^{n-1} = o,$$

eine Gleichung vom nten Grade.

Aufgabe 5. Es seyen a, n, l gegeben, und s soll gesucht werden.

Auflösung. Wir substituiren den Werth von e aus der Grundformel III. in die Grundformel I., und erhalten

$$\text{aus III.}\quad e = \frac{s-a}{s-l}$$

$$\text{und I.}\quad l = a\left(\frac{s-a}{s-l}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\sqrt[n-1]{l}}{\sqrt[n-1]{a}} = \frac{s-a}{s-l}$$

$$s\sqrt[n-1]{l} - l\sqrt[n-1]{l} = s\sqrt[n-1]{a} - a\sqrt[n-1]{a}$$

$$s(\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}) = l\sqrt[n-1]{l} - a\sqrt[n-1]{a}$$

$$s = \frac{l\sqrt[n-1]{l} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}$$

$$\text{oder } s = \frac{\sqrt[n-1]{l^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}} = \frac{l^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{l^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Aufgabe 6. Es seyen a, l, s gegeben, und n soll gesucht werden.

Auflösung. Wir substituiren den Werth von e aus der Grundformel III. in die Grundformel I., und erhalten

$$\text{aus III.}\quad e = \frac{s-a}{s-l}$$

$$\text{und I.}\quad l = a\left(\frac{s-a}{s-l}\right)^{n-1}$$

$$\log l - \log a = (n-1)\,[\log(s-a) - \log(s-l)]$$

$$n = \frac{\log l - \log a}{\log(s-a) - \log(s-l)} + 1.$$

Aufgabe 7. Es seyen a, e, s gegeben, und n soll gesucht werden.

$$b^m = (a + \delta)^m = a^m + ma^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-2}\delta^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}\delta^3 + \ldots$$

$$c^m = (b + \delta)^m = b^m + mb^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}b^{m-2}\delta^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^{m-3}\delta^3 + \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$l^m = (k + \delta)^m = k^m + mk^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}k^{m-2}\delta^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^{m-3}\delta^3 + \ldots$$

Auflösung. Aus der Grundformel II. erhalten wir

$$s(e-1) = ae^n - a$$

$$\frac{s(e-1) + a}{a} = e$$

$$\log\,[s(e-1) + a] - \log a = n \log e$$

$$n = \frac{\log\,[s(e-1) + a] - \log a}{\log e}.$$

Aufgabe 8. Es seyen l, e, s gegeben, und n soll gesucht werden.

Auflösung. Wir substituiren den Werth von a aus der Grundformel III. in die Grundformel I., und erhalten

aus III. $a = le - s(e-1)$

und I. $l = [le - s(e-1)]e^{n-1}$

$$e^{n-1} = \frac{l}{le - s(e-1)}$$

$$(n-1) \log e = \log l - \log\,[le - s(e-1)]$$

$$n = \frac{\log l - \log\,[le - s(e-1)]}{\log e} + 1.$$

Formeltafel für die geometrischen Progressionen.

Nro.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
1.	a, e, n	l	$l = ae^{n-1}$,
2.	a, e, s		$l = \frac{a + (e-1)s}{e}$,
3.	a, n, s		$l(s-l)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$,
4.	e, n, s		$l = \frac{(e-1)\,se^{n-1}}{e^n - 1}$.

Setzen wir nun

Nro.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
5.	a, e, n		$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$,
6.	a, e, l		$s = \frac{le - a}{e - 1}$,
7.	a, n, l	s	$s = \frac{l^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{l^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
8.	e, n, l		$s = \frac{l(e^n - 1)}{(e-1)e^{n-1}}$.
9.	e, n, l		$a = \frac{l}{e^{n-1}}$,
10.	e, n, s	a	$a = \frac{(e-1)s}{e^n - 1}$,
11.	e, l, s		$a = le - (e-1)s$,
12.	n, l, s		$a(s-a)^{n-1} - l(s-l)^{n-1} = 0$.
13.	a, n, l		$e = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$,
14.	a, n, s		$e^n - \frac{s}{a} . e + \frac{s-a}{a} = 0$, oder $e^{n-1} + e^{n-2} + \ldots + e + 1 - \frac{s}{a} = 0$,
15.	a, l, s	e	$e = \frac{s-a}{s-l}$.
16.	n, l, s		$e^n - \frac{s}{s-l} . e^{n-1} + \frac{l}{s-l} = 0$, oder $\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{1}{e} + 1 - \frac{s}{l} = 0$.
17.	a, e, l		$n = \frac{\log l - \log a}{\log e} + 1$,
18.	a, e, s		$n = \frac{\log [a + (e-1)s] - \log a}{\log e}$,
19.	a, l, s	n	$n = \frac{\log l - \log a}{\log (s-a) - \log (s-l)} + 1$,
20.	e, l, s		$n = \frac{\log l - \log [le - (e-1)s]}{\log e} + 1$.

Maier Hirsch bemerkt (in seiner Sammlung algebraischer Aufgaben):

$$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 + \ldots + i^0 + k^0 + l^0,$$
$$S_1 = a + b + c + \ldots + i + k + l,$$
$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + i^2 + k^2 + l^2,$$
$$\vdots$$
$$S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots + i^m + k^m + l^m,$$

so erhalten wir durch die Summation der über einander stehenden Glieder der vorhergehenden Gleichungen:

$$S_m - a^m = S_m - l^m + m\delta(S_{m-1} - l^{m-1}) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\delta^2(S_{m-2} - l^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\delta^3(S_{m-3} - l^{m-3}) + \text{2c.}$$

und hieraus

$$l^m - a^m = m\delta(S_{m-1} - l^{m-1}) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\delta^2(S_{m-2} - l^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\delta^3(S_{m-3} - l^{m-3}) + \text{2c.}$$

eine Gleichung, welche die Summe einer jeden auf die Glieder einer arithmetischen Progression gebauten Reihe gleich hoher Potenzen leicht verschafft; denn substituiren wir in dieser Gleichung successive $m = 1, 2, 3, 4, 5,$ 2c., so erhalten wir

$$\text{I.} \quad l - a = \delta(S_0 - l^0),$$

woraus sich $S_0 \, (= a^0 + b^0 + c^0 + \ldots)$ findet, eine Summe, welche bekanntlich $= n$ ist;

$$\text{II.} \quad l^2 - a^2 = 2\delta(S_1 - l) + \delta^2(S_0 - l^0),$$

„Ein König in Indien, Namens Sheran, verlangte, nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers Asephad, daß Sessa, der Erfinder des Schachspieles, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Waizenkörner, welche herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbrettes, 2 für das zweite, 4 für das dritte, und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viele Körner als für das vorhergehende gerechnet werden. Als gerechnet wurde, fand man 18446744073709551615 Waizenkörner; eine Summe, welche auf der ganzen Erde, nach einer mäßigen Berechnung, erst in mehr als 70 Jahren gewonnen werden könnte, wenn man auch alles feste Land zum Anbau von Waizen benützen würde!“

woraus sich S_1 $(= a + b + c + \dots)$ findet, eine Summe, welche bekanntlich $= \frac{n(a + l)}{2}$ ist;

III. $l^3 - a^3 = 3\delta(S_2 - l^2) + 3\delta^2(S_1 - l) + \delta^3(S_0 - l^0)$,
woraus sich S_2 $(= a^2 + b^2 + c^2 + \dots)$ findet;

IV. $l^4 - a^4 = 4\delta(S_3 - l^3) + 6\delta^2(S_2 - l^2) + 4\delta^3(S_1 - l)$
$+ \delta^4(S_0 - l^0)$,
woraus sich S_3 $(= a^3 + b^3 + b^3 + \dots)$ findet;

V. $l^5 - a^5 = 5\delta(S_4 - l^4) + 10\delta^2(S_3 - l^3) + 10\delta^3(S_2 - l^2)$
$+ 5\delta^4(S_1 - l) + \delta^5(S_0 - l^0)$,
woraus sich S_4 $(= a^4 + b^4 + c^4 + \dots)$ findet;

ꝛc.

Beispiel 1. Die Summe der Reihe

$$s_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n \text{ zu finden.}$$

Auflösung. Wir substituiren in II. $l = n$, $a = 1$, $\delta = 1$, $S_0 = n$, und erhalten die Gleichung:

$$n^2 - 1 = 2(s_1 - n) + n - 1,$$

$$\text{woraus } s_1 = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n + 1)}{1 \,.\, 2}.$$

Beispiel 2. Die Summe der Reihe

$$s_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \text{ zu finden.}$$

Auflösung. Wir substituiren in III. $l = n$, $a = 1$, $\delta = 1$, $S_1 = \frac{n^2 + n}{2}$, $S_0 = n$, und erhalten die Gleichung:

$$n^3 - 1 = 3(s - n^2) + 3\left(\frac{n^2 + n}{2} - n\right) + n - 1,$$

$$\text{woraus } s_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.*$$

Beispiel 3. Die Summe der Reihe

$$s_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \text{ zu finden.}$$

Auflösung. Wir substituiren in IV. $l = n$, $a = 1$,

* Es ist nämlich $2n^3 + 3n^2 + n$
$= n(2n^2 + 2n + n + 1) = n[2n(n + 1) + (n + 1)]$
$= n(n + 1)(2n + 1)$.

$\delta = 1$, $S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, $S_1 = \frac{n^2 + n}{2}$, $S_0 = n$,
und erhalten die Gleichung:

$$n^4 - 1 = 4(s_3 - n^3) + 6\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - n^2\right) + 4\left(\frac{n^2 + n}{2} - n\right) + n - 1,$$

woraus $S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *.

Beispiel 4. Die Summe der Reihe

$s_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$ zu finden.

Auflösung. Wir substituiren in V. $l = n$, $a = 1$, $\delta = 1$,
$S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$, $S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, $S_1 = \frac{n^2 + n}{2}$,
$S_0 = n$, und erhalten die Gleichung:

$$n^5 - 1 = 5(s_4 - n^4) + 10\left(\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} - n^3\right) + 10\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - n^2\right) + 5\left(\frac{n^2 + n}{2} - n\right) + n - 1,$$

woraus $s_4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$.

Anmerkung. Wie in den vorhergehenden Beispielen, so sollen auch in der Folge $s_0, s_1, s_2, \ldots s_m$ die Summen der Reihen gleich hoher Potenzen ausdrücken, welche auf die Glieder der natürlichen Zahlenreihe gebaut sind; so, daß also

$$s_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0,$$
$$s_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n,$$
$$s_2 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$s_m = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m,$$

§. 75.

Lehrsatz. Drückt p eine ganze positive Zahl und n^p das nte oder allgemeine Glied einer Reihe von n Gliedern aus, so ist deren Summe $= s_p$.

---

* Es ist nämlich $n^4 + 2n^3 + n^2$
$= n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2$.

Beweis. Denn n^p ist offenbar das allgemeine Glied der Reihe: $1^p, 2^p, 3^p, \ldots n^p$ (§. 74, Anm.).

§. 76.

Lehrsatz. Drücken p, q, r, ... ganze positive Zahlen und $n^p \pm n^q \pm n^r \pm \ldots$ das nte oder allgemeine Glied einer Reihe von n Gliedern aus, so ist deren Summe $= s_p \pm s_q \pm s_r \pm \ldots$

Beweis. Denn die Reihe, deren allgemeines Glied $n^p \pm n^q \pm n^r \pm \ldots$ ist, läßt sich offenbar in folgende Reihen auflösen:

$$1^p,\ 2^p,\ 3^p,\ \ldots\ n^p,$$
$$\pm\,(1^q,\ 2^q,\ 3^q,\ \ldots\ n^q),$$
$$\pm\,(1^r,\ 2^r,\ 3^r,\ \ldots\ n^r),$$
$$\pm\ \ldots\ldots$$ (§. 74, Anm.).

Arithmetische und geometrische Summenreihen*. Figurirte Zahlen.

§. 77.

Geht man von irgend einer arithmetischen Progression aus und bildet nach dieser ersten Reihe eine zweite Reihe von Zahlen, so, daß die nte Zahl der zweiten Reihe gleich der Summe der n ersten Glieder der ersten Reihe ist, bildet ferner nach der zweiten Reihe eine dritte Reihe von Zahlen, so, daß die nte Zahl der dritten Reihe gleich der Summe der n ersten Zahlen der zweiten Reihe ist, und fährt auf diese Weise mit der Bildung neuer Zahlenreihen fort: so entstehen höhere arithmetische Reihen, welche arithmetische Summenreihen genannt werden. Z. B.

Erste Reihe. $1,\ 1+\delta,\ 1+2\delta,\ 1+3\delta,\ 1+4\delta, \ldots$

Zweite Reihe. $1,\ 2+\delta,\ 3+3\delta,\ 4+6\delta,\ 5+10\delta, \ldots$

Dritte Reihe. $1,\ 3+\delta,\ 6+4\delta,\ 10+10\delta,\ 15+20\delta, \ldots$

Vierte Reihe. $1,\ 4+\delta,\ 10+5\delta,\ 20+15\delta,\ 35+35\delta, \ldots$

---

* Die Reihen gleich hoher Potenzen und die arithmetischen Summenreihen finden in der höhern Mathematik (z. B. bei der Berechnung der Tafeln verschiedener Art, der Entwicklung mancher Functionen, ꝛc.), in der Physik und Mechanik ihre Anwendung.

Die erste Reihe (die arithmetische Progression), von der man bei der Bildung solcher höheren arithmetischen Reihen ausgeht, wird Grundreihe, und die darauf folgenden höheren Reihen werden respective arithmetische Summenreihen der ersten (die zweite Reihe), zweiten (die dritte Reihe), dritten (die vierte Reihe), ꝛc. Ordnung genannt.

§. 78.

Beginnt man, wie im vorhergehenden Beispiele, mit einer Grundreihe, deren erstes Glied 1 ist, so werden auch die ersten Glieder aller darauf folgenden arithmetischen Summenreihen gleich 1, und man nennt alsdann die zwei ersten arithmetischen Summenreihen figurirte Zahlenreihen, die Glieder derselben figurirte Zahlen und zwar die Glieder der ersten arithmetischen Summenreihe (d. i. der Reihe $1, 2 + \delta, 3 + 3\delta, \ldots$) Polygonalzahlen und die Glieder der zweiten arithmetischen Summenreihe (d. i. der Reihe $1, 3 + \delta, 6 + 4\delta, \ldots$) Polyedralzahlen, weil man Punkte in der Anzahl, welche jedes dieser Glieder ausdrückt, so ordnen kann, daß ebene, oder körperliche Figuren entstehen.

Die Polygonalzahlen heißen insbesondere Dreiecks- oder Trigonalzahlen, Vierecks- oder Tetragonalzahlen, Fünfecks- oder Pentagonalzahlen, ꝛc., und die Polyedralzahlen dreiseitige, vierseitige, fünfseitige Pyramidalzahlen, ꝛc., je nachdem $\delta = 1, 2, 3,$ ꝛc. gesetzt wird.

Diesem gemäß sind die Glieder der Reihe

der Trigonalzahlen: 1, 3, 6, 10, 15, ...,

der dreiseitigen Pyramidalzahlen: 1, 4, 10, 20, 35, ...,

der Tetragonalzahlen: 1, 4, 9, 16, 25, ...,

der vierseitigen Pyramidalzahlen: 1, 5, 14, 30, 55, ...,

der Pentagonalzahlen: 1, 5, 12, 22, 35, ...,

der fünfseitigen Pyramidalzahlen: 1, 6, 18, 30, 65, ..., ꝛc. *

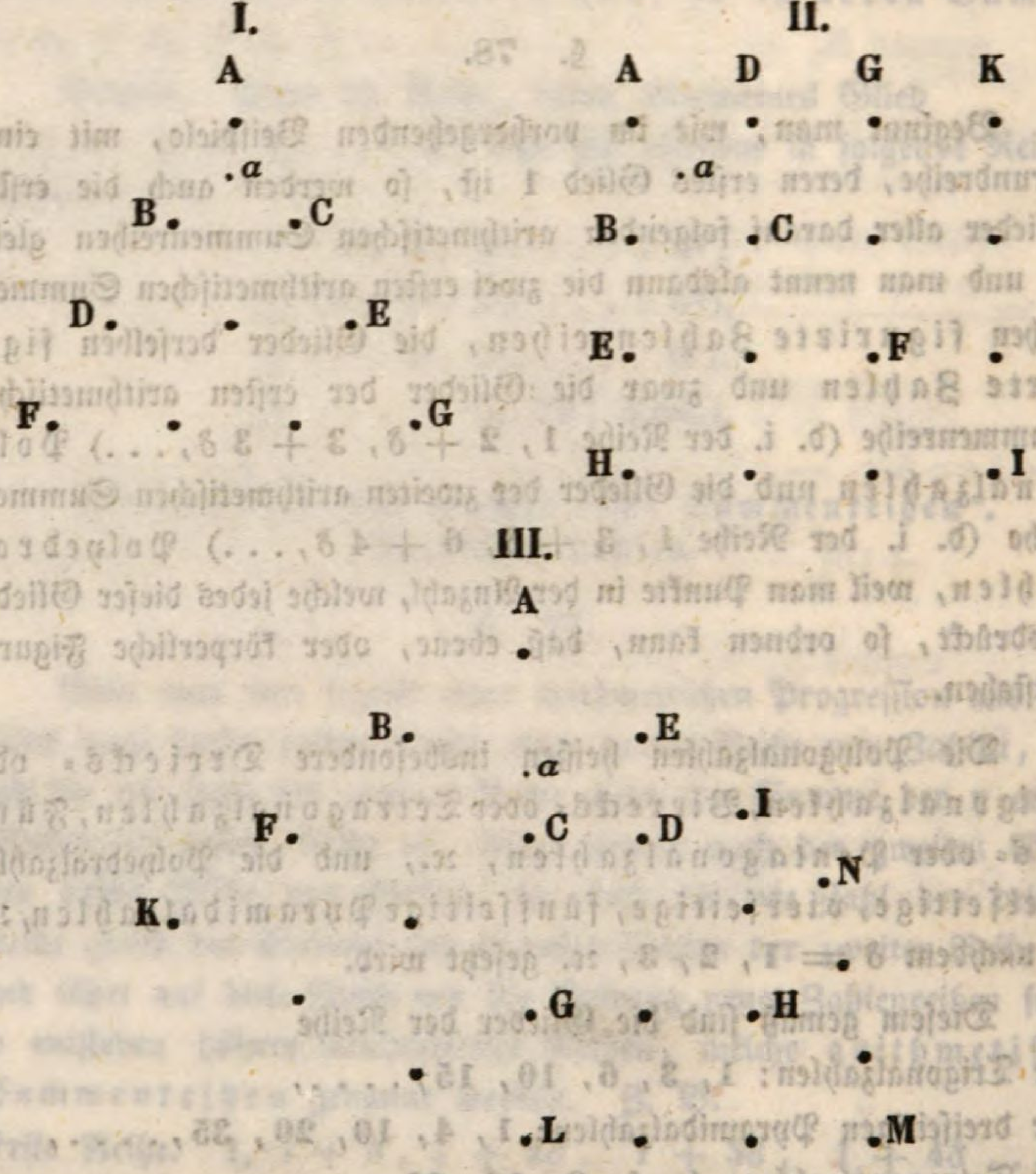
---

* Folgende Bilder ebener und körperlicher Figuren werden das Gesagte veranschaulichen.

§. 79.

Wir kommen nun an das Aufsuchen des allgemeinen Gliedes und der Summe aller Glieder oder des summatorischen Gliedes der arithmetischen Summenreihen, und werden uns hiebei auf die Betrachtung einiger figurirten Zahlenreihen beschränken, weil hernach

---



In I. enthalten die Dreiecke ABC, ADE, AFG respective 3, 6, 10 Punkte; in II. die Vierecke ABCD, AEFG, AHIK respective 4, 9, 16 Punkte; in III. die Fünfecke ABCDE, AFGHI, AKLMN respective 5, 12, 22 Punkte. Auch sind in I. je die drei Seiten der einzelnen Dreiecke, in II. je die vier Seiten der einzelnen Vierecke, in III. je die fünf Seiten der einzelnen Fünfecke einander gleich, d. h. sie enthalten stets gleich viele Punkte.

Denkt man sich ferner in I. unter der Spitze *a* das Dreieck ABC, unter diesem das Dreieck ADE und unter diesem das Dreieck AFG placirt, so entstehen successive die dreiseitigen Pyramiden ABC*a*, ADE*a*, AFG*a*,

das Bestimmen des allgemeinen und des summatorischen Gliedes jeder andern arithmetischen Summenreihe keine Schwierigkeit mehr darbieten kann.

Aufgabe 1. Man verlangt das nte oder allgemeine Glied der Reihe der Trigonalzahlen

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots.$$

Auflösung. Da die Reihe

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots.$$

auf die arithmetische Progression

$$\div 1 . 2 . 3 . \ldots . n$$

gebaut worden ist, deren Summe

$$= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{1 . 2},$$

so ist das nte oder allgemeine Glied der Reihe der Trigonalzahlen

$$= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{1 . 2} \text{ (§. 77) *.}$$

Aufgabe 2. Man verlangt die Summe der n ersten Glieder der Reihe der Trigonalzahlen

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots.$$

Auflösung. Da das nte oder allgemeine Glied der Reihe

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots:$$

$$= \frac{1}{2} . n^2 + \frac{1}{2} . n \text{ ist (Aufg. 1),}$$

so beträgt das summatorische Glied dieser Reihe $\frac{1}{2} . s_2 + \frac{1}{2} . s_1$ (§. 76). Es ist aber

$$s_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \text{ (§. 74, Beisp. 2),}$$

$$s_1 = \frac{n^2 + n}{2} \text{ (§. 74, Beisp. 1);}$$

---

welche respective 4, 10, 20 Punkte enthalten. Auf ähnliche Weise entstehen in II. successive die vierseitigen Pyramiden ABCDa, AEFGa, AHIKa, welche respective 5, 14, 30 Punkte enthalten; ebenso in III. die fünfseitigen Pyramiden ABCDEa, AFGHIa, AKLMNa, welche respective 6, 18, 30 Punkte enthalten.

* $\frac{n(n+1)}{1 . 2}$ ist auch die Anzahl der verschiedenen Combinationsformen mit Wiederholungen für n Elemente zur zweiten Classe (siehe §. 44).

also die Summe der n ersten Glieder der Reihe der Trigonalzahlen

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{12} + \frac{n^2 + n}{4}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Aufgabe 3. Man verlangt das nte oder allgemeine Glied der dreiseitigen Pyramidalzahlen

1, 4, 10, 20, 35, ...

Auflösung. Da die Reihe

1, 4, 10, 20, 35, ...

auf die Reihe der Trigonalzahlen

$$1, 3, 6, 10, \ldots . \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

gebaut worden ist, deren Summe

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ (Aufg. 2)},$$

so ist das nte oder allgemeine Glied der Reihe der dreiseitigen Pyramidalzahlen

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} *.$$

Aufgabe 4. Man verlangt die Summe der n ersten Glieder der dreiseitigen Pyramidalzahlen

1, 4, 10, 20, 35, ...

Auflösung. Da das nte oder allgemeine Glied der Reihe

1, 4, 10, 20, 35, ...

$$= \frac{1}{6} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n \text{ ist (Aufg. 3)},$$

so beträgt das summatorische Glied dieser Reihe

$\frac{1}{6} \cdot s_3 + \frac{1}{2} \cdot s_2 + \frac{1}{3} \cdot s_1$ (§. 76). Es ist aber

---

* 1. Es ist nämlich $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 2n + n + 2)$
$= n[n(n+1) + 2(n+1)] = n(n+1)(n+2)$.

2. $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ist auch die Anzahl der verschiedenen Combinationsformen mit Wiederholungen für n Elemente zur dritten Classe (s. §. 44).

$$s_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \text{ (§. 74, Beisp. 3)},$$

$$s_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \text{ (§. 74, Beisp. 2)},$$

$$s_1 = \frac{n^2 + n}{2} \text{ (§. 74, Beisp. 1)};$$

also der Summe der n ersten Glieder der Reihe der dreiseitigen Pyramidalzahlen

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{24} + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{12} + \frac{n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \text{ *}.$$

Aufgabe 5. Man verlangt das nte oder allgemeine Glied der Reihe der Tetragonalzahlen

1, 4, 9, 16, ...

Auflösung. Da die Reihe

1, 4, 9, 16, ...

auf die arithmetische Progression

$$\div 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7 \, ... \, 2n - 1$$

gebaut worden ist, deren Summe $= \frac{n}{2} \, . \, 2n = n^2$, so ist das nte oder allgemeine Glied der Reihe der Tetragonalzahlen $= n^2$, was man auch auf den ersten Anblick erkennt.

Aufgabe 6. Man verlangt die Summe der n ersten Glieder der Reihe der Tetragonalzahlen

1, 4, 9, 16, ...

Auflösung. Da das nte oder allgemeine Glied der Reihe

1, 4, 9, 16, ...

$= n^2$ ist (Aufg. 5), so beträgt das summatorische Glied dieser

---

* 1. Es ist nämlich $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n^3 + 5n^2 + n^2 + 5n + 6n + 6)$
$= n[n^2(n + 1) + 5n(n + 1) + 6(n + 1)] = n(n + 1)[n^2 + 5n + 6]$
$= n(n + 1)[n^2 + 3n + 2n + 6] = n(n + 1)[n(n + 2) + 3(n + 2)]$
$= n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

2. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4}$ ist auch die Anzahl der verschiedenen Combinationsformen mit Wiederholungen für n Elemente zur vierten Classe (siehe §. 44).

Reihe s_2 (§. 76). Es ist aber $s_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ (§. 74, Beisp. 2); also die Summe der n ersten Glieder der Reihe der Tetragonalzahlen

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Aufgabe 7. Man verlangt das nte oder allgemeine Glied der Reihe der vierseitigen Pyramidalzahlen

$$1, 5, 14, 30, \ldots.$$

Auflösung. Da die Reihe

$$1, 5, 14, 30, \ldots.$$

auf die Reihe der Tetragonalzahlen

$$1, 4, 9, 16, \ldots. n^2$$

gebaut worden ist, deren Summe

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \text{ (Aufg. 6)},$$

so ist das nte oder allgemeine Glied der Reihe der vierseitigen Pyramidalzahlen

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Aufgabe 8. Man verlangt die Summe der n ersten Glieder der Reihe der vierseitigen Pyramidalzahlen

$$1, 5, 14, 30, \ldots.$$

Auflösung. Da das nte oder allgemeine Glied der Reihe

$$1, 5, 14, 30, \ldots.$$

$$= \frac{1}{3} \,.\, n^3 + \frac{1}{2} \,.\, n^2 + \frac{1}{6} \,.\, n \text{ (Aufg. 7)},$$

so beträgt das summatorische Glied dieser Reihe

$\frac{1}{3} \,.\, s_3 + \frac{1}{2} \,.\, s_2 + \frac{1}{6} \,.\, s_1$ (§. 76). Es ist aber

$$s_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \text{ (§. 74, Beisp. 3)},$$

$$s_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \text{ (§. 74, Beisp. 2)},$$

$$s_1 = \frac{n^2 + n}{2} \text{ (§. 74, Beisp. 1)};$$

also die Summe der n ersten Glieder der Reihe der vierseitigen Pyramidalzahlen

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{12} + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{12} + \frac{n^2 + n}{12}$$

$$= \frac{n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n}{12} = \frac{n(n+1)^2 (n+2)}{3 \cdot 4} .^{*}$$

§. 80.

Geht man von irgend einer geometrischen Progression aus und bildet nach dieser ersten Reihe eine zweite Reihe von Zahlen, so, daß die nte Zahl der zweiten Reihe gleich der Summe der n ersten Glieder der ersten Reihe ist, bildet ferner nach der zweiten Reihe eine dritte Reihe von Zahlen, so, daß die nte Zahl der dritten Reihe gleich der Summe der n ersten Zahlen der zweiten Reihe ist, und fährt auf diese Weise mit der Bildung neuer Zahlenreihen fort; so entstehen höhere geometrische Reihen, welche geometrische Summenreihen genannt werden. Z. B.

Erste Reihe. 1, 2, 4, 8, 16, ...
Zweite Reihe. 1, 3, 7, 15, 31, ...
Dritte Reihe. 1, 4, 11, 26, 57, ...
Vierte Reihe. 1, 5, 16, 42, 99, ...

Die erste Reihe (die geometrische Progression), von der man bei der Bildung solcher höheren geometrischen Reihen ausgeht, wird Grundreihe, und die darauf folgenden höheren Reihen werden respective geometrische Summenreihen der ersten (die zweite Reihe), zweiten (die dritte Reihe), dritten (die vierte Reihe), 2c. Ordnung genannt.

Da die geometrischen Summenreihen nur selten in der Anwendung vorkommen, und das Bestimmen ihres allgemeinen und summatorischen Gliedes häufig sehr große, manchmal unüberwindliche Schwierigkeiten darbietet, so werden wir uns hierauf nicht weiter einlassen.

---

* Es ist nämlich $n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n = n(n^3 + 3n^2 + n^2 + 3n + 2n + 2)$
$= n[n^2(n+1) + 3n(n+1) + 2(n+1)] = n(n+1)[n^2 + 3n + 2)$
$= n(n+1)(n^2 + n + 2n + 2) = n(n+1)[n(n+1) + 2(n+1)]$
$= n(n+1)^2 (n+2)$.

§. 81.

Bei einer arithmetischen und geometrischen Summenreihe läßt sich leicht untersuchen, welches ihr Rang und ihre Grundreihe sey. Subtrahirt man nämlich bei einer gegebenen arithmetischen oder geometrischen Summenreihe das erste Glied vom zweiten Gliede, das zweite vom dritten, überhaupt das n—1te vom nten, so erhält man, wie sich aus der Entstehung dieser höheren Reihen von selbst versteht, eine Zahlenreihe, auf welche die gegebene unmittelbar gebaut worden ist. Von der gefundenen Zahlenreihe schließt man hierauf ebenso auf eine Zahlenreihe von einem um 1 niedrigern Range, und so fort, bis man endlich zur Grundreihe (einer arithmetischen oder geometrischen Progression) gelangt.

In folgenden Aufgaben findet das Gesagte seine Anwendung.

Aufgabe 1. Man verlangt das nte oder allgemeine Glied der Reihe

$$1, 3, 7, 15, 31, \ldots.$$

Auflösung. Da $3 - 1 = 2$, $7 - 3 = 4$, $15 - 7 = 8$, $31 - 15 = 16$, so entstand die Reihe

$$1, 3, 7, 15, 31, \ldots.$$

durch Summation aus der geometrischen Progression

$$\div\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 \ldots. 2^{n-1},$$

deren Summe $2^n - 1$ beträgt. Die gegebene Reihe ist demnach eine geometrische Summenreihe vom ersten Range, und hat $2^n - 1$ zum nten oder allgemeinen Gliede.

Aufgabe 2. Man verlangt das nte oder allgemeine Glied der Reihe

$$1, 5, 15, 35, 70, \ldots.$$

Auflösung. 1) Da $5 - 1 = 4$, $15 - 5 = 10$, $35 - 15 = 20$, $70 - 35 = 35$, so entstand die Reihe

$$1, 5, 15, 35, 70, \ldots.$$

durch Summation aus der Reihe

$$1, 4, 10, 20, 35, \ldots.$$

2) Da $4 - 1 = 3$, $10 - 4 = 6$, $20 - 10 = 10$, $35 - 20 = 15$, so entstand die Reihe

$$1, 4, 10, 20, 35, \ldots.$$

durch Summation aus der Reihe

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots.$$

3) Da $3 - 1 = 2$, $6 - 3 = 3$, $10 - 6 = 4$, $15 - 10 = 5$, so entstand die Reihe

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots.$$

durch Summation aus der arithmetischen Progression

$$\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots.$$

Die gegebene Reihe ist demnach eine arithmetische Summenreihe vom dritten Range, und hat zum nten oder allgemeinen Gliede die Summe der n ersten Glieder der Reihe der dreiseitigen Pyramidalzahlen

$$1, 4, 10, 20, 35, \ldots.$$

nämlich $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 . 2 . 3 . 4}$ (§. 79, Aufg. 4).

Reihen gleich hoher Potenzen, welche auf die Glieder einer geometrischen Progression gebaut sind.

§. 82.

Aufgabe 1. Man verlangt das allgemeine Glied der Reihe

$$a^m, b^m, c^m, \ldots. l^m,$$

$$\text{wenn} \;\; \div\!\div \; \overset{1.}{a} : \overset{2.}{b} : \overset{3.}{c} \ldots. \overset{n.}{l}.$$

Auflösung. In der geometrischen Progression

$$\div\!\div \; a : b : c \ldots. l$$

ist das allgemeine (nte oder letzte) Glied $l = ae^{n-1}$, wenn e den Exponenten der Progression bezeichnet; also

$$l^m = (ae^{n-1})^m = a^m e^{nm-m}.$$

Aufgabe 2. Man verlangt die Summe der Reihe

$$a^m, b^m, c^m, \ldots. l^m,$$

$$\text{wenn} \;\; \div\!\div \; \overset{1.}{a} : \overset{2.}{b} : \overset{3.}{c} \ldots. \overset{n.}{l}.$$

Auflösung. Bezeichnet e den Exponenten der geometrischen Progression

$$\div\!\div \; a : b : c \ldots. l,$$

so ist $a^m + b^m + c^m + \ldots. + l^m$

$$= a^m + (ae)^m + (ae^2)^m + \ldots. + (ae^{n-1})^m$$

$$= a^m [1 + e^m + (e^m)^2 + \ldots. + (e^m)^{n-1}].$$

Es ist ferner die Summe der geometrischen Progression

$$\div\!\div\ 1 : e^m : (e^m)^2 \ldots . (e^m)^{n-1}$$

$$= \frac{e^{mn} - 1}{e^m - 1}; \text{ also}$$

$$a^m [1 + e^m + (e^m)^2 + \ldots + (e^m)^{n-1}]$$

$$= \frac{a^m(e^{nm} - 1)}{e^m - 1} \text{ die Summe der gegebenen Reihe.}$$

Reihen, welche durch die gliederweise Multiplication einer arithmetischen Progression in eine geometrische Progression entstehen.

§. 83.

Aufgabe 1. Man verlangt die Summe der Reihe

$$1,\ 2e,\ 3e^2,\ \ldots .\ ne^{n-1}\ ^*.$$

Auflösung. Setzen wir

$$\text{I.}\quad S = 1 + 2e + 3e^2 + \ldots + ne^{n-1},$$

so ist

$$\text{II.}\quad Se = \quad e + 2e^2 + \ldots + (n-1)e^{n-1} + ne^n$$

$$\text{II.}-\text{I.}\quad Se - S = -(1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1}) + ne^n$$

$$S(e-1) = ne^n - \frac{e^n - 1}{e - 1}$$

$$S = \frac{ne^n}{e-1} - \frac{e^n - 1}{(e-1)^2}.$$

Aufgabe 2. Man verlangt die Summe der Reihe

$$\alpha a,\ (\alpha + \delta)ae,\ (\alpha + 2\delta)ae^2,\ \ldots [\alpha + (n-1)\delta]ae^{n-1}\ ^{**}.$$

Auflösung. Setzen wir

$$S = \alpha a + (\alpha + \delta)ae + (\alpha + 2\delta)ae^2 + \ldots + [\alpha + (n-1)\delta]ae^{n-1},$$

so ist

$$S = \left\{ \begin{array}{l} a(\alpha + \alpha e + \alpha e^2 + \ldots + \alpha e^{n-1}) \\ + a\delta e[1 + 2e + \ldots + (n-1)e^{n-2}] \end{array} \right\}.$$

Nun ist $\alpha + \alpha e + \alpha e^2 + \ldots + \alpha e^{n-1}$ die Summe einer geometrischen Progression von n Gliedern und $1 + 2e + \ldots + (n-1)e^{n-2}$ die Summe einer Reihe von $n-1$ Gliedern, welche wir in der vorhergehenden Aufgabe bestimmt haben; rc.

---

* Diese Reihe entsteht aus
der arithmetischen Progression $\div\ 1 . 2 . 3 \ldots . n$ und
der geometrischen Progression $\div\!\div\ 1 : e : e^2 \ldots e^{n-1}$.

** Diese Reihe entsteht aus
der arithmetischen Progression $\div\ \alpha . \alpha+\delta . \alpha+2\delta \ldots \alpha + (n-1)\delta$ und
der geometrischen Progression $\div\!\div\ a : ae : ae^2 \ldots ae^{n-1}$.

Reihen, welche durch die gliederweise Multiplication einer Reihe Polygonalzahlen in eine geometrische Progression entstehen.

§. 84.

Aufgabe 1. Man verlangt die Summe der Reihe

$$1,\ 3e,\ 6e^2,\ 10e^3, \ldots \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,.\,e^{n-1}\ *.$$

Auflösung. Setzen wir

$$\text{I. } S = 1 + 3e + 6e^2 + 10e^3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,.\,e^{n-1},$$

so ist

$$\text{II. } Se = e + 3e^2 + 6e^3 + \ldots + \frac{(n-1)n}{1\,.\,2}\,.\,e^{n-1} + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,.\,e^n$$

$$\text{II.} - \text{I. } Se - S = -(1 + 2e + 3e^2 + \ldots + ne^{n-1}) + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,.\,e^n$$

$$S(e-1) = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,.\,e^n - \frac{ne^n}{e-1} + \frac{e^n-1}{(e-1)^2} \quad (\text{§. 83, Aufg. 2})$$

$$S = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{e^n}{e-1} - \frac{ne^n}{(e-1)^2} + \frac{e^n-1}{(e-1)^3}.$$

---

* Diese Reihe entsteht aus der Reihe der Trigonalzahlen $1, 3, 6, 10, \ldots \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$ und der geometrischen Progression $\div\!\div\ 1 : e : e^2 : e^3 \ldots . e^{n-1}$.

Daß $\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$ das nte Glied der Reihe $1, 3, 6, 10, \ldots$ ist, wurde §. 79, Aufg. 1 entwickelt. Substituirt man in

Aufgabe 2. Man verlangt die Summe der Reihe

$$1,\ (2+\delta)e,\ (3+3\delta)e^2,\ (4+6\delta)e^3,\ \ldots \left[n+\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}\,.\,\delta\right]e^{n-1}\ *.$$

Auflösung. Setzen wir

$$S = 1+(2+\delta)e+(3+3\delta)e^2+(4+6\delta)e^3+\ldots+\left[n+\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}\,.\,\delta\right]e^{n-1},$$

so ist

$$S = \left\{\begin{array}{l} 1+2e+3e^2+\ldots\ldots+ne^{n-1} \\ +\,\delta e\left[1+3e+6e^2+\ldots\ldots+\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}\,.\,e^{n-2}\right]\end{array}\right\}.$$

Nun ist $1+2e+3e^2+\ldots\ldots+ne^{n-1}$ die Summe einer Reihe von n Gliedern, welche aus §. 83,

---

diesem allgemeinen Gliede $n=1$, so erhält man $\frac{1\,.\,2}{1\,.\,2}=1$, das erste Glied dieser Reihe; substituirt man $n=4$, so erhält man $\frac{4\,.\,5}{1\,.\,2}=10$, das vierte Glied dieser Reihe; rc.

* Diese Reihe entsteht aus

der Reihe der Polygonalzahlen $1,\ 2+\delta,\ 3+3\delta,\ \ldots\ldots n+\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}\,.\,\delta$ und

der geometrischen Progression $\div\!\!\div 1 : e : e^2 \ldots\ldots e^{n-1}$.

Daß $n+\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}\,.\,\delta$ das nte Glied der Reihe $1,\ 2+\delta,\ 3+3\delta\ \ldots$ ist, erkennt man leicht aus §. 77, §. 78 und §. 79, Aufg. 1. Substituirt man in diesem allgemeinen Gliede $n=1$, so erhält man $1+\frac{0\,.\,1}{1\,.\,2}\,.\,\delta=1$ das erste Glied dieser Reihe; substituirt man $n=3$, so erhält man $3+\frac{2\,.\,3}{1\,.\,2}\,.\,\delta=3+3\delta$ das dritte Glied dieser Reihe; rc.

Aufg. 1 bekannt ist, und $1 + 3e + 6e^2 + \ldots + \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} \cdot e^{n-2}$ eine Reihe von n—1 Gliedern, welche wir in der vorhergehenden Aufgabe bestimmt haben; 2c.

Reihen, welche durch die gliederweise Multiplication einer Reihe Pyramidalzahlen in eine geometrische Progression entstehen.

§. 85.

Aufgabe 1. Man verlangt die Summe der Reihe

$$1,\ 4e,\ 10e^2,\ 20e^3,\ \ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot e^{n-1}\ *.$$

Auflösung. Setzen wir

$$\text{I. } S = 1 + 4e + 10e^2 + 20e^3 + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot e^{n-1},$$

so ist

$$\text{II. } Se = e + 4e^2 + 10e^3 + \ldots + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot e^{n-1} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot e^n$$

$$\text{II.} - \text{I. } Se - S = -\left[1 + 3e + 6e^2 + 10e^3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot e^{n-1}\right] + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot e^n$$

$$S(e-1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot e^n - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{e^n}{e-1} + \frac{ne^n}{(e-1)^2} - \frac{e^n - 1}{(e-1)^3} \text{ (§. 84, Aufg. 1)}$$

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{e^n}{e-1} - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{e^n}{(e-1)^2} + \frac{ne^n}{(e-1)^3} - \frac{e^n - 1}{(e-1)^4}.$$

---

* Diese Reihe entsteht aus

Aufgabe 2. Man verlangt die Summe der Reihe

$$1,\ (3+\delta)e,\ (6+4\delta)e^2,\ (10+10\delta)e^3,\ \ldots \left[\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\delta\right]e^{n-1}\ *.$$

Auflösung. Setzen wir

$$S = 1+(3+\delta)e+(6+4\delta)e^2+(10+10\delta)e^3+\ldots+\left[\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\delta\right]e^{n-1},$$

$$\text{so ist } S = \begin{cases} 1+3e+6e^2+\ldots+\dfrac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,.\,e^{n-1} \\ +\,\delta e\left[1+4e+10e^2+\ldots+\dfrac{(n-1)n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,e^{n-2}\right] \end{cases}.$$

---

der Reihe der dreiseitigen Pyramidalzahlen $1,\ 4,\ 10,\ 20,\ \ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ und

der geometrischen Progression $\div\!\!\div\ 1 : e : e^2 : e^3 \ldots e^{n-1}$.

Daß $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ das nte Glied der Reihe 1, 4, 10, 20, ... ist, wurde §. 79, Aufg. 3 entwickelt. Substituirt man in diesem allgemeinen Gliede $n=1$, so erhält man $\frac{1\,.\,2\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}=1$, das erste Glied dieser Reihe; substituirt man $n=4$, so erhält man $\frac{4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}=20$, das vierte Glied dieser Reihe; rc.

* Diese Reihe entsteht aus

Nun ist $1 + 3e + 6e^2 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot e^{n-1}$ die Summe einer Reihe von n Gliedern, welche aus §. 84, Aufg. 1 bekannt ist, und $1 + 4e + 10e^2 + \ldots + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot e^{n-2}$ eine Reihe von $n - 1$ Gliedern, welche wir in der vorhergehenden Aufgabe bestimmt haben; ꝛc.

---

der Reihe der Pyramidalzahlen $1, 3+\delta, 6+4\delta, 10+10\delta, \ldots \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \delta$ und der geometrischen Progression $\div\!\!\div 1 : e : e^2 : e^3 \ldots e^{n-1}$.

Daß $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \delta$ das nte Glied der Reihe, $1, 3+\delta, 6+4\delta, 10+10\delta, \ldots$ ist, erkennt man leicht aus §. 77, §. 78 und §. 79, Aufg. 3. Substituirt man in diesem allgemeinen Gliede $n = 1$, so erhält man $\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \delta = 1$, das erste Glied dieser Reihe; substituirt man $n = 4$, so erhält man $\frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \delta = 10 + 10\delta$, das vierte Glied dieser Reihe; ꝛc.

Angewandte Aufgaben über verschiedene höhere arithmetische Reihen.

§. 86.

Aufgabe 1. In den Zeughäusern werden bisweilen die Kugeln nach dreiseitigen Pyramiden aufgehäuft, nämlich so, daß die oberste Kugel an der Spitze von 3 Kugeln, diese 3 Kugeln von 6 Kugeln, diese 6 Kugeln von 10 Kugeln, ꝛc. getragen werden, oder mit andern Worten, daß die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Schichten, von der obersten an gerechnet, durch die Trigonalzahlen 1, 3, 6, 10, ... angegeben werden. a) Wie viele Kugeln liegen in der untersten dreiseitigen Schichte, wenn die Seite derselben 20 Kugeln enthält? b) Wie viele Kugeln sind in der ganzen Pyramide aufgehäuft?

Auflösung. a) Da die Seite der untersten dreieckigen Schichte 20 Kugeln enthält, so wird die Anzahl der Kugeln dieser Schichte durch das zwanzigste Glied der Reihe 1, 3, 6, 10, ... ausgedrückt (§. 78, Anm.). Nun ist das nte oder allgemeine Glied der Reihe dieser Trigonalzahlen $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ (§. 79, Aufg. 1), und hiernach das zwanzigste Glied derselben $= \frac{20 \cdot 21}{1 \cdot 2} = 210$; also befinden sich in der untersten Schichte 210 Kugeln.

b) Die Anzahl der Kugeln, welche sich in der ganzen Pyramide befinden, wird durch die Summe der 20 ersten Glieder der Reihe 1, 3, 6, 10, ... ausgedrückt. Nun ist die Summe der n ersten Glieder dieser Trigonalzahlen $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (§. 79, Aufg. 2), und hiernach die Summe der 20 ersten Glieder derselben $= \frac{20 \cdot 21 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1540$; also befinden sich in der ganzen Pyramide 1540 Kugeln.

Aufgabe 2. Wenn nun aber in der vorhergehenden Aufgabe die Pyramide unvollständig oder abgestutzt ist, und auf jeder Seite der obersten Schichte 11 Kugeln liegen: wie viele Kugeln werden sich alsdann in dem Haufen (Pyramidenrumpfe) befinden?

Auflösung. Denkt man sich den Pyramidenrumpf zu einer vollständigen Pyramide ergänzt, so findet man die Anzahl der

Kugeln, welche der Pyramidenrumpf enthält, indem man die Anzahl der Kugeln, welche sich in der Ergänzungspyramide befinden, von der Anzahl der Kugeln abzieht, welche sich in der vollständigen Pyramide befinden.

Nun ist die Anzahl der Kugeln, welche die vollständige Pyramide enthält, bei welcher auf jeder Seite der untersten Schichte 20 Kugeln liegen, $= \frac{20 \,.\, 21 \,.\, 22}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 1540$ (siehe Aufg. 1), ferner die Anzahl der Kugeln, welche die Ergänzungspyramide enthält, bei welcher auf jeder Seite der untersten Schichte 10 Kugeln liegen, $= \frac{10 \,.\, 11 \,.\, 12}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 220$; es befinden sich daher in dem Pyramidenrumpfe $1520 - 220 = 1300$ Kugeln.

Aufgabe 3. Bisweilen werden die Kugeln nach vierseitigen Pyramiden aufgeschichtet, so, daß die Schichten sämmtlich Quadrate bilden, und die Kugeln in den verschiedenen Schichten, von der obersten an gerechnet, durch die Tetragonalzahlen, 1, 4, 9, 16, ... angegeben werden. Wenn nun in jeder Seite der untersten Schichte 10 Kugeln liegen, wie viele Kugeln sind in der ganzen Pyramide aufgehäuft?

Auflösung. Da die Seite des untersten Quadrats 10 Kugeln enthält, so wird die Anzahl der Kugeln, welche sich in der ganzen Pyramide befinden, durch die Summe der 10 ersten Glieder der Reihe 1, 4, 9, 16, ... ausgedrückt. Nun ist die Summe der n ersten Glieder dieser Tetragonalzahlen $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ (§. 79, Aufg. 6), und hiernach die Summe der 10 ersten Glieder derselben $= \frac{10 \,.\, 11 \,.\, 21}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 385$; also befinden sich 385 Kugeln in der Pyramide.

Aufgabe 4. Wenn nun aber in der vorhergehenden Aufgabe die Pyramide unvollständig oder abgestutzt ist, und auf jeder Seite der obersten Schichte 4 Kugeln liegen: wie viele Kugeln werden sich alsdann in dem Haufen (Pyramidenrumpfe) befinden?

Auflösung. Denkt man sich den Pyramidenrumpf zu einer vollständigen Pyramide ergänzt, so findet man die Anzahl der Kugeln, welche der Pyramidenrumpf enthält, indem man die Anzahl der Kugeln, welche sich in der Ergänzungspyramide befinden, von

der Anzahl der Kugeln abzieht, welche sich in der vollständigen Pyramide befinden.

Nun ist die Anzahl der Kugeln, welche die vollständige Pyramide enthält, bei welcher auf jeder Seite der untersten Schichte 10 Kugeln liegen, $= \frac{10 \,.\, 11 \,.\, 21}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 385$ (siehe Aufg. 2), ferner die Anzahl der Kugeln, welche die Ergänzungspyramide enthält, bei welcher auf jeder Seite der untersten Schichte 3 Kugeln liegen, $= \frac{3 \,.\, 4 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 14$; es befinden sich daher $385 - 14 = 371$ Kugeln in dem Pyramidenrumpfe.

Aufgabe 5. Wenn die Anzahl der Kugeln in einer vollständigen dreiseitigen Pyramide von x Schichten = s gegeben ist; welche Gleichung hat man aufzulösen, um daraus die Anzahl der Schichten oder die Anzahl der Kugeln in der Seite der untersten Schichte zu bestimmen?

Auflösung. Die Anzahl aller Kugeln, welche die dreiseitige Pyramide enthält, wird durch die Summe der x ersten Glieder der Reihe 1, 3, 6, 10, . . . ausgedrückt. Nun ist die Summe dieser Trigonalzahlen $= \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}$ (§. 79, Aufg. 2); also $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6} = s$, und hiernach

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 6s = 0$$

die verlangte Gleichung, aus welcher x, die Anzahl der Kugeln in der Seite der untersten Schichte der Pyramide, bestimmt werden kann.

Aufgabe 6. Wenn die Anzahl der Kugeln in einer vollständigen vierseitigen Pyramide von x Schichten = s gegeben ist, welche Gleichung hat man aufzulösen, um daraus die Anzahl der Schichten oder die Anzahl der Kugeln in der Seite der untersten Schichte zu bestimmen?

Auflösung. Die Anzahl aller Kugeln, welche die vierseitige Pyramide enthält, wird durch die Summe der x ersten Glieder der Reihe 1, 4, 9, 16, ... ausgedrückt. Nun ist die Summe dieser Tetragonalzahlen $= \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6}$ (§. 79, Aufg. 5); also $\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = s$, und hiernach

$$2x^3 + 3x^2 + x - 6s = 0$$

die verlangte Gleichung, aus welcher x, die Anzahl der Kugeln in der Seite der untersten Schichte der Pyramide, bestimmt werden kann.

Aufgabe 7. Wenn viele Kugeln aufzuschichten sind, so gibt man den Schichten gewöhnlich die Form von Rechtecken. In der obersten Schichte befindet sich alsdann nur eine Reihe von m Kugeln; diese ruht auf zwei Reihen, jede von $m + 1$ Kugeln, diese wieder auf drei Reihen, jede von $m + 2$ Kugeln, ꝛc.; es ist nämlich in jeder folgenden Schichte eine Reihe, und in jeder Reihe eine Kugel mehr. Bei dieser Anordnung werden also die Schichten der Ordnung nach folgende Anzahlen von Kugeln enthalten: $m,\ 2(m + 1),\ 3(m + 2),\ 4(m + 3), \ldots$ Wie viele Kugeln liegen in dem ganzen Haufen?

Auflösung. Die Anzahl aller Kugeln, welche der Haufen enthält, wird durch die Summe der n ersten Glieder der Reihe $m,\ 2(m + 1),\ 3(m + 2),\ 4(m + 3), \ldots$ ausgedrückt. Da nun das nte oder allgemeine Glied dieser Reihe $= n(m + n - 1) = (m-1) \cdot n + n^2$, so beträgt die Summe der n ersten Glieder derselben $(m-1) \cdot s_1 + s_2$ (§. 76).

Es ist aber $s_1 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ (§. 74, Beispiel 1),

$s_2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (§. 74, Beispiel 2);

also die Summe der n ersten Glieder obiger Reihe

$$= \frac{(m-1)n\,(n + 1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{n(n + 1)(2n + 3m - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

die Anzahl aller Kugeln, welche in dem Haufen liegen.

Aufgabe 8. Aus solchen in Rechtecken geformten Schichten pflegt man noch eine andere Art von Kugelhaufen zu bilden, welche aber zu ihrem Gleichgewichte erfordern, daß sie von zwei Seiten an andere Kugelhaufen angelehnt, oder auf sonst eine Art unterstützt werden. Es liegen nämlich oben m Kugeln in einer Reihe, darunter zwei Reihen, jede von $m - 1$ Kugeln, unter diesen drei Reihen, jede von $m - 2$ Kugeln, ꝛc.; so, daß die Kugeln in den

verschiedenen Schichten durch folgende Zahlen gegeben sind: m, $2(m-1)$, $3(m-2)$, $4(m-3)$, ... Wie viele Kugeln befinden sich in einem solchen Haufen von n Schichten?

Auflösung. Die Anzahl aller Kugeln, welche der Haufen enthält, wird durch die Summe der n ersten Glieder der Reihe m, $2(m-1)$, $3(m-2)$, $4(m-3)$, ... ausgedrückt. Da nun das $n$te oder allgemeine Glied dieser Reihe $= n(m-n+1) = (m+1) . n - n^2$, so beträgt die Summe der n ersten Glieder derselben $(m+1) . s_1 - s_2$ (§. 76).

Es ist aber $s_1 = \frac{n(n+1)}{1 . 2}$ (§. 74, Beispiel 1),

$$s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 . 2 . 3} \text{ (§. 74, Beispiel 2);}$$

also die Summe der n ersten Glieder obiger Reihe

$$= \frac{(m+1)\, n(n+1)}{1 . 2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 . 2 . 3}$$

$$= \frac{n(n+1)(3m-2n+2)}{1 . 2 . 3},$$

die Anzahl aller Kugeln, welche in dem Haufen liegen.

Aufgabe 9. Kann ein solcher Haufen nur von der einen Seite angelehnt werden, so gibt man gewöhnlich jeder folgenden Schichte zwar eine Reihe mehr, läßt aber die Anzahl der Kugeln in jeder Reihe unverändert. Es wird alsdann die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Schichten der Ordnung nach durch folgende Zahlen gegeben: m, $2m$, $3m$, $4m$, ... Wie viele Kugeln liegen in einem solchen Haufen von n Schichten?

Auflösung. Die Anzahl aller Kugeln, welche der Haufen enthält, wird durch die Summe der n ersten Glieder der Reihe m, $2m$, $3m$, $4m$, ... ausgedrückt. Da nun das $n$te oder allgemeine Glied dieser Reihe $= nm = m . n$, so beträgt die Summe der n ersten Glieder derselben, $m . s_1$ (§. 76). Es ist aber $s_1 = \frac{n(n+1)}{1 . 2}$ (§. 74, Beisp. 1), also die Summe der n ersten Glieder obiger Reihe $= \frac{mn(n+1)}{1 . 2}$, die Anzahl aller Kugeln, welche der Haufen enthält.

Sechste Abhandlung.

Trigonometrische Formeln und Reihen, welche in der höhern Mathematik eine große Anwendung finden.

Die Formel von Moivre. Ihre Erörterung.

§. 87.

Folgende Formel heißt nach ihrem Erfinder, einem französischen Mathematiker, die Moivre'sche Formel:

(A) $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{n} = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi.$

Um nach ihr das Binom $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ auf irgend eine Potenz zu erheben, genügt es, den Bogen φ mit dem Exponenten der Potenz zu multipliciren. Hiebei ist es einerlei, ob man $+$, oder $-$ vor $\sqrt{-1}$ setzt; denn dieß kommt darauf hinaus, $+\varphi$ in $-\varphi$ zu verwandeln *.

Der Fall, in welchem der Exponent eine ganze positive Zahl ist, kommt am häufigsten in der Anwendung vor, und soll nun zuerst betrachtet werden. Durch Multiplication findet man

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)(\cos\psi + \sqrt{-1}\,\sin\psi)$$
$$= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + \sqrt{-1}(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi).$$

Es ist aber bekanntlich

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi+\psi),$$
$$\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi = \sin(\varphi+\psi);\text{ also}$$

---

* Substituirt man nämlich $-\varphi$ anstatt $+\varphi$ in der Formel (A), so erhält man

$$(\cos -\varphi + \sqrt{-1}\,\sin -\varphi)^{n} = \cos -n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin -n\varphi,$$

eine Formel, welche, weil $\cos -\varphi = \cos\varphi$, $\sin -\varphi = -\sin\varphi$, $\cos -n\varphi = \cos n\varphi$, $\sin -n\varphi = -\sin n\varphi$, folgende Form annimmt:

$$(\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{n} = \cos n\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi.$$

$$(cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi)\,(cos\,\psi + \sqrt{-1}\,sin\,\psi)$$
$$= cos\,(\varphi + \psi) + \sqrt{-1}\,sin\,(\varphi + \psi).$$

Werden demnach zwei Ausdrücke von der Form $cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi$ mit einander multiplicirt, so erhält man ein Product von derselben Form, in welchem die beiden Bögen summirt vorkommen.

Um ferner das erhaltene Product mit einem neuen Factor von derselben Form zu multipliciren, genügt es daher, zur Summe der beiden Bögen den neuen Bogen zu addiren, und so fort, welches auch die Anzahl der Factoren seyn mag.

Bildet man also ein Product aus n solchen Factoren, welche alle gleich $cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi$ sind, so erhält man

$$(1)\ (cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi)^n = cos\,n\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,n\varphi.$$

Wir betrachten nun den Fall, in welchem der Exponent eine positive gebrochene Zahl ist. Substituirt man $\frac{\varphi}{n}$ für φ in der Formel (1), so erhält man

$$\left(cos\,\frac{\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,sin\,\frac{\varphi}{n}\right)^n = cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi.$$

Zieht man hierauf aus den beiden Theilen der Gleichung die nte Wurzel aus, und setzt einen gebrochenen Wurzelexponenten anstatt eines Wurzelzeichens, so ist die Formel (A) für den Exponenten $\frac{1}{n}$ erwiesen; denn auf diese Weise erhält man

$$(2)\ (cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi)^{\frac{1}{n}} = cos\,\frac{\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,sin\,\frac{\varphi}{n}.$$

Der Ausdruck $A^{\frac{m}{n}}$ drückt im Allgemeinen aus, man soll A auf die mte Potenz erheben, und aus dem Resultate die nte Wurzel ausziehen. Erhebt man daher das Binom $cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi$ nach der Formel (1) auf die mte Potenz, und zieht aus dem Resultate nach der Formel (2) die nte Wurzel aus, so erhält man

$$(3)\ (cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi)^{\frac{m}{n}} = cos\,\frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,sin\,\frac{m\varphi}{n}.$$

Es ist dieß die Formel (A), wenn man in derselben für n einen beliebigen positiven Bruch $\frac{m}{n}$ setzt.

Für den Fall, daß n negativ ist, bemerke man, daß

$$(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi)\,(\cos n\varphi - \sqrt{-1}\,\sin n\varphi)$$
$$= \cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi = 1,$$

welche Gleichung

$$\frac{1}{\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi} = \cos n\varphi - \sqrt{-1}\,\sin n\varphi,$$

oder, was damit einerlei ist,

$$(4)\quad (\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + \sqrt{-1}\,\sin(-n\varphi)$$

verschafft *.

Die Formel (A) ist also giltig, n mag irgend eine positive, oder negative Zahl seyn.

Die irrationalen Exponenten haben wir nicht in Betrachtung gezogen, weil sie keinen Sinn haben, es sey denn, daß sie durch commensurable Zahlen ersetzt werden, welche von ihnen so wenig differiren können, als man nur will. Die imaginären Exponenten endlich lassen gar keine Erörterung zu.

§. 88.

Die Formel (A), welche eben so einfach als elegant ist, erscheint als sehr mangelhaft, wenn der Exponent ein Bruch ist. Ihr erstes Glied ist alsdann eine Wurzelgröße und muß als solche mehrere Werthe haben, indeß ihr zweites Glied nur einen Werth angibt. Folgende Erklärungen werden dazu dienen, dieser Unvollkommenheit abzuhelfen.

Kehren wir zur Formel (2) zurück, in welcher n eine ganze positive Zahl ausdrückt. Ihr erstes Glied, welches gleich der $\sqrt[n]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi}$ ist, muß n verschiedene Werthe haben; damit nun ihr zweites Glied diese Werthe alle verschaffe, werden wir zeigen, daß es genügt, für φ in derselben successive alle Bögen zu substituiren, welche mit φ gleichen *Sinus* und *Cosinus* haben.

Der allgemeine Ausdruck dieser Bögen ist $\varphi + kC$, wo C die ganze Peripherie und k irgend eine ganze positive, oder negative Zahl bezeichnet. Setzt man nun $\varphi + kC$ anstatt φ, so verwandelt sich das zweite Glied der Formel (2) in

---

* Es ist nämlich $\frac{1}{\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi} = \frac{1}{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n}$ $= (\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{-n}$, $\cos n\varphi = \cos - n\varphi$, $\sin n\varphi = -\sin - n\varphi$.

$$(5)\ \cos\frac{\varphi + kC}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi + kC}{n},$$

in welchem Zustande es genau dieselben Werthe hat, wie das erste Glied.

Denn wenn n eine ganze Zahl ist, so erhellt aus der Formel (1), daß man $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$ erhält, indem man dieses zweite Glied auf die nte Potenz erhebt.

Substituirt man ferner in diesem zweiten Gliede $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$, so erhält man n verschiedene Werthe. Denn gesetzt, es seyen

$$\cos\frac{\varphi + \alpha C}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi + \alpha C}{n} \text{ und}$$

$$\cos\frac{\varphi + \beta C}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi + \beta C}{n}$$

irgend zwei dieser Werthe, in welchem α und β zwei ganze Zahlen $> n$ bezeichnen. Wären nun diese beiden Werthe einander gleich, so müßten sowohl ihre reellen, als auch ihre imaginären Theile einander einzeln gleich seyn *; ferner müßte diesem gemäß die Differenz der beiden Bögen $\frac{\varphi + \alpha C}{n}$ und $\frac{\varphi + \beta C}{n}$ gleich einer Peripherie oder gleich mehreren Peripherien seyn: es ist aber diese Differenz, $= \frac{(\alpha - \beta)C}{n}$, kleiner als C, weil α und $\beta < n$ sind.

Setzt man endlich in diesem zweiten Gliede für k andere Zahlen als $0, 1, 2, \ldots n-1$, so findet man keine neuen Werthe mehr. In der That, alle andere positive und negative Zahlen lassen sich durch die Formel $n\gamma + n'$ ausdrücken, wenn γ irgend eine ganze positive, oder negative Zahl und n' eine positive Zahl $< n$

---

* Dieser wichtige Satz findet in vielen Theilen der Mathematik eine große Anwendung und läßt sich beweisen, wie folgt:

Aus der Gleichung $a + b\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, wo a, b, α, β beliebige reelle Größen bezeichnen sollen, folgt

$$\left(\frac{a - \alpha}{\beta - b}\right)^2 = -1,$$

eine Gleichung, die nur dann möglich ist, wenn $a = \alpha$, $\beta = b$; da bekanntlich das Quadrat einer reellen Größe nie negativ, wohl aber der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$ jeder positiven und negativen Zahl gleich seyn kann.

bezeichnet: setzt man nun $k = n\gamma + n'$, so verwandelt sich der Ausdruck (5) in

$$\cos\left(\gamma C + \frac{\varphi + n'C}{n}\right) + \sqrt{-1}\,\sin\left(\gamma C + \frac{\varphi + n'C}{n}\right),$$

oder, wenn man die unnützen Peripherien wegläßt, in

$$\cos\frac{\varphi + n'C}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi + n'C}{n};$$

und da n' eine positive Zahl $< n$ darstellt, so fällt dieser Ausdruck unter die Ausdrücke, welche man erhalten hat, indem man $k = 0, 1, 2, \ldots n - 1$ setzte.

Es erlangt also das zweite Glied der Formel (2) die ganze Allgemeinheit, welche es haben soll, wenn man Sorge trägt, in demselben für den Bogen φ nicht nur diesen Bogen selbst, sondern auch successive die Bögen $\varphi + C$, $\varphi + 2C, \ldots \varphi + (n-1)C$ zu substituiren.

Die Formel (3) läßt sich auf eine ähnliche Weise erörtern. Man hat sie gefunden, indem man den Ausdruck $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ auf die mte Potenz erhob und hierauf aus dem Resultate die nte Wurzel auszog. Nun gibt die Formel (1), wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist, zuerst

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\,\sin m\varphi,$$

hierauf die Formel (2) für die nte Wurzel

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{m\varphi}{n}.$$

Damit aber das zweite Glied die nämliche Ausdehnung erhalte als das erste Glied, muß man nach dem, was so eben erklärt wurde, $m\varphi + kC$, oder was damit einerlei ist, successive

$$m\varphi,\ m\varphi + C,\ m\varphi + 2C, \ldots\ m\varphi + (n-1)C$$

für $m\varphi$ darin substituiren.

Einige Erklärungen sind noch nothwendig, wenn man die Formel (3) anwenden will, um die nte Wurzel aus dem Ausdrucke $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ auszuziehen und hierauf diese Wurzel auf die mte Potenz zu erheben. Ist der Bruch $\frac{m}{n}$ irreductibel, so kann man sich unmittelbar der Formel (3) bedienen: denn für den Fall, daß m und n Primzahlen unter sich sind, weiß man, daß

$(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$. Läßt sich aber der Bruch $\frac{m}{n}$ auf den Primbruch $\frac{p}{q}$ reduciren, so weiß man, daß $(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[q]{A^p} = A^{\frac{p}{q}}$ ist; will man also in diesem Falle von der Formel (3) Gebrauch machen, so muß man zuvor den Bruch $\frac{m}{n}$ auf seine einfachste Form $\frac{p}{q}$ bringen, wodurch sie in folgende Formel übergeht:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p\varphi}{q} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{p\varphi}{q}.$$

Würde man $\frac{m}{n}$ in der Formel (3) beibehalten, so wäre das erste Glied eine Wurzelgröße des nten Grades, welcher n verschiedene Werthe entsprechen, indeß dieses erste Glied nur q verschiedene Werthe haben soll. Noch müssen wir bemerken, wie dieß oben bereits geschehen ist, daß man sich hinter $p\varphi$ stets $+ kC$ zu denken hat.

§. 89.

Wie wir gesagt haben, findet die Gleichung $(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m}$ statt, wenn m und n relative Primzahlen sind: dieß heißt mit andern Worten, das Radiciren kann auf das Potenziren, oder umgekehrt das Potenziren auf das Radiciren nach Belieben folgen. Zieht man nun zuerst aus dem Ausdrucke $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ nach der Formel (2) die nte Wurzel aus, und erhebt hierauf das Resultat nach der Formel (1) auf die mte Potenz, so erhält man

$$(\sqrt[n]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi})^m = \cos\frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{m\varphi}{n};$$

und hat sodann im zweiten Gliede dieser Gleichung $\varphi + kC$ für φ zu substituiren. Erhebt man ferner den Ausdruck $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ zuerst nach der Formel (1) auf die mte Potenz und zieht hierauf aus dem Resultate nach der Formel (2) die nte Wurzel aus, so erhält man

$$\sqrt[n]{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^m} = \cos\frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{m\varphi}{n};$$

und hat sodann im zweiten Gliede der Gleichung $m\varphi + kC$ für $m\varphi$ zu substituiren. Es sind daher die beiden Ausdrücke

$$\cos \frac{m(\varphi + kC)}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{m(\varphi + kC)}{n}$$

$$\text{und } \cos \frac{m\varphi + kC}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{m\varphi + kC}{n},$$

in welchen k irgend eine ganze Zahl bezeichnet, nothwendigerweise einander vollkommen gleich, vorausgesetzt, daß m und n Primzahlen zu einander sind.

§. 90.

Im Vorhergehenden haben wir gezeigt, welche Vorsichtsmaßregeln anzuwenden sind, wenn man von der Moivre'schen Formel Gebrauch machen will. Kommt darin der gebrochene Exponent $\frac{m}{n}$ vor, so wird der größern Einfachheit wegen gewöhnlich vorausgesetzt, das m und n Primzahlen zu einander sind; aber auch in diesem Falle darf nicht vergessen werden, daß man sich $\varphi + kC$ anstatt des Bogens φ und $m\varphi + kC$ anstatt des Bogens $m\varphi$ zu denken hat.

Formeln für die Entwicklung von $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ $(\sin \varphi)^n$ und $(\cos \varphi)^n$.

§. 91.

Nach der Moivre'schen Formel

$$(1)\quad \cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi = (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n,$$

in welcher n eine ganze positive Zahl ausdrücken soll, erhalten wir durch die Substitution von $-\varphi$ für $+\varphi$

$$(2)\quad \cos n\varphi - \sqrt{-1} \sin n\varphi = (\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi)^n.$$

Wird die zweite Formel zur ersten addirt und hierauf von derselben subtrahirt, so erhält man

$$(3)\quad \cos n\varphi = \frac{(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n + (\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi)^n}{2}$$

$$(4)\quad \sin n\varphi = \frac{(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n - (\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

§. 92.

Führen wir das Potenziren nach der binomischen Formel wirklich aus und lassen die Ausdrücke weg, welche sich gegen einander aufheben, so erhalten wir

$$(5)\quad \cos n\varphi = (\cos\varphi)^n - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(\cos\varphi)^{n-2}(\sin\varphi)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\cos\varphi)^{n-4}(\sin\varphi)^4 - \text{rc.}$$

$$(6)\quad \sin n\varphi = \frac{n}{1}(\cos\varphi)^{n-1}\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(\cos\varphi)^{n-3}(\sin\varphi)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}(\cos\varphi)^{n-5}(\sin\varphi)^5 - \text{rc.}$$

Diese Formeln drücken den *Sinus* und *Cosinus* des vielfachen Bogens $n\varphi$ als Function des *Sinus* und *Cosinus* des einfachen Bogens φ aus. Das Gesetz, nach welchem die darin enthaltenen Glieder auf einander folgen, ist evident; und wie in der binomischen Formel, von welcher sie abstammen, setzen sich ihre Glieder so lange fort, bis eines derselben $= 0$ wird *.

Man kann zu diesen Formeln auch bloß durch Hilfe der Gleichung (1) gelangen. In der That, die Entwicklung des zweiten Gliedes dieser Gleichung läßt sich in zwei Theile zerlegen, wovon der eine reell und der andere imaginär ist; damit nun diese Gleichung stattfinden könne, müssen in ihr sowohl die reellen, als

---

* Substituirt man z. B. in diesen Formeln $n = 2$ und $\varphi = a$, so erhält man

$$\text{I.}\quad \cos 2a = (\cos a)^0 - \frac{2\,.\,1}{1\,.\,2}(\cos a)^0(\sin a)^2,$$

oder $\cos 2a = 1 - \sin^2 a$,

$$\text{II.}\quad \sin 2a = 2\cos a \sin a.$$

Substituirt man $n = 3$ und $\varphi = a$, so erhält man

$$\text{III.}\quad \sin 3a = 3(\cos a)^2 \sin a - \frac{3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3}(\cos a)^0(\sin a)^3,$$

oder mittelst der Relation $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$.

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

$$\text{IV.}\quad \cos 3a = (\cos a)^3 - \frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\cos a(\sin a)^2,$$

oder mittelst der Relation $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$,

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

auch die imaginären Theile einander einzeln gleich seyn, welche Bemerkung zu den beiden Formeln führt *.

§. 93.

In den höheren Theilen der Mathematik kommt man oft in den Fall, $(\sin x)^n$ und $(\cos x)^n$ als Functionen des *Sinus* und *Cosinus* der vielfachen Bögen auszudrücken. Wir wollen daher nun zeigen, wie man dahin gelangt, wenn n eine ganze positive Zahl ist, was gewöhnlich vorausgesetzt wird.

Setzt man

$\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi = u$, $\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi = v$,

so erhält man $2\cos\varphi = u + v$, $2\sqrt{-1}\,\sin\varphi = u - v$,

$$2^n(\cos\varphi)^n = (u+v)^n,\ (2\sqrt{-1})^n(\sin\varphi)^n = (u-v)^n,$$

oder durch die Entwicklung der Potenzen

$$(7)\ 2^n(\cos\varphi)^n = u^n + \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^{n-2}v^2 + \text{ꝛc.}$$

$$(8)\ (2\sqrt{-1})^n(\sin\varphi)^n = u^n - \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^{n-2}v^2 - \text{ꝛc.}$$

Betrachten wir für den Augenblick bloß die Formel (7), und nehmen zuerst an, n sey eine ungerade Zahl, $= 2m + 1$.

---

* Auf diese Weise erhält man

$$\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n$$

$$= (\cos\varphi)^n + n(\cos\varphi)^{n-1}\sqrt{-1}\,\sin\varphi - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(\cos\varphi)^{n-2}(\sin\varphi)^2$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(\cos\varphi)^3\sqrt{-1}(\sin\varphi)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\cos\varphi)^{n-4}(\sin\varphi)^4$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}(\cos\varphi)^{n-5}(\sin\varphi)^5 - \ldots$$

und hieraus durch die Gleichsetzung sowohl der reellen, als auch der imaginären Glieder der beiden Theile dieser Gleichung

$$\cos n\varphi = (\cos\varphi)^n - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(\cos\varphi)^{n-2}(\sin\varphi)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\cos\varphi)^{n-4}(\sin\varphi)^4 - \ldots$$

$$\sin n\varphi = n(\cos\varphi)^{n-1}\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(\cos\varphi)^{n-3}(\sin\varphi)^3$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}(\cos\varphi)^{n-5}(\sin\varphi)^5 - \ldots$$

Nun weiß man, daß die Glieder, welche gleich weit von den äußersten Gliedern abstehen, gleiche Coefficienten haben, und daß die Anzahl aller Glieder der Formel $= 2m + 2$ ist. Nimmt man daher die zweite Hälfte der Glieder und schreibt sie in umgekehrter Ordnung unter die erste Hälfte, so erhält man, wie leicht einzusehen ist,

$$2^n(\cos\varphi)^n = u^n + \frac{n}{1}u^{n-1}v + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}u^{m+1}v^m$$

$$+ v^n + \frac{n}{1}uv^{n-1} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}u^m v^{m+1},$$

oder einfacher

$$2^n(\cos\varphi)^n = (u^n + v^n) + \frac{n}{1}uv(u^{n-2} + v^{n-2})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}u^m v^m(u + v).$$

Es ist aber einerseits nach der Moivre'schen Formel allgemein

$$u^k + v^k = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^k + (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)^k$$

$$= \cos k\varphi + \sqrt{-1}\sin k\varphi + \cos k\varphi - \sqrt{-1}\sin k\varphi = 2\cos k\varphi,$$

und andererseits

$$uv = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

In Folge dieser Bemerkungen vereinfacht sich die Entwicklung von $2^n(\cos\varphi)^n$ sehr, und man erhält, wenn alle Glieder durch 2 dividirt werden,

$$(9)\quad 2^{n-1}(\cos\varphi)^n = \cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)\varphi$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}\cos\varphi.$$

Nehmen wir zweitens an, n sey eine gerade Zahl $= 2m$, so hat die Formel (7) $2m + 1$ Glieder; und man findet, indem man das mittelste Glied in zwei Hälften zerlegt, auf ähnliche Weise raisonnirt und reducirt, wie im vorhergehenden Falle,

$$(10)\ 2^{n-1}(\cos\varphi)^n = \cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)\varphi$$

$$\ldots + \frac{1}{2}\,.\,\frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}.$$

Betrachten wir nunmehr die Formel (8). Die Glieder haben abwechslungsweise die Vorzeichen + und —; ist daher n eine ungerade Zahl, = 2m + 1, so haben die Glieder, welche gleich weit von den äußersten Gliedern abstehen, gleiche Coefficienten mit entgegengesetzten Vorzeichen. Raisonnirt man sofort wie bei der Formel (7), so erhält man leicht

$$(2\sqrt{-1})^{2m+1}(\sin\varphi)^{2m+1} = (u^n - v^n) - \frac{n}{1}uv\,(u^{n-2} - v^{n-2})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^2v^2\,(u^{n-4} - v^{n-4}) - \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}u^mv^m\,(u-v).$$

Es ist aber einerseits $uv = 1$, und andererseits allgemein $u^k - v^k = 2\sqrt{-1}\,\sin k\varphi$. In Folge dieser Bemerkungen vereinfacht sich die Entwicklung von $(2\sqrt{-1})^{2m+1}(\sin\varphi)^{2m+1}$ sehr, und man erhält, wenn alle Glieder durch $2\sqrt{-1}$ dividirt werden,

$$(11)\ (2\sqrt{-1})^{2m}(\sin\varphi)^{2m+1} = \sin n\varphi - \frac{n}{1}\sin(n-2)\varphi$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\sin(n-4)\varphi \ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}\sin\varphi.$$

Ist ferner n eine gerade Zahl, = 2m, so haben die Glieder der Formel (8), welche von den äußersten Gliedern gleich weit abstehen, gleiche Coefficienten und gleiche Vorzeichen. Raisonnirt und reducirt man daher wie im ähnlichen Falle bei der Formel (7), so findet man leicht

$$(12)\ 2^{2m-1}(\sqrt{-1})^{2m}(\sin\varphi)^{2m} = \cos n\varphi - \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)\varphi\ \ldots \pm \frac{1}{2}\,.\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}.$$

Die Formeln (9), (10), (11), (12) sind diejenigen, welche wir entwickeln wollten. Sie dienen dazu, die Potenzen des *Sinus*, oder *Cosinus* in eine Reihe von Gliedern aufzulösen, von welchen

jedes den *Sinus* und *Cosinus* eines vielfachen Bogens auf der ersten Potenz enthält. Man bemerkt leicht, daß in den zwei letzten Formeln die $\sqrt{-1}$, welche auf einer geraden Potenz vorkommt, stets einen reellen Factor abgibt, entweder $+1$, oder -1, je nachdem der Exponent durch 4, oder 2 theilbar ist. Es ist ferner zur Bequemlichkeit des Calculs wohl zu merken, daß man, indem man dem durch die ersten Glieder angezeigten Bildungsgesetze folgt, aufzuhören hat, sobald man auf einen negativen Bogen stößt, und daß man nur die Hälfte des letzten Gliedes nehmen darf, wenn sein Bogen $= 0$ ist *.

Die Entwicklung des *Sinus* und *Cosinus* in Reihen.

§. 94.

Auf folgende Weise leitet **Euler** von den Formeln (5) und (6) des §. 92 die Reihen ab, welche den *Sinus* und *Cosinus* als Functionen des Bogens ausdrücken. Man kann, ohne daß n aufhört, eine ganze Zahl zu seyn, so über φ disponiren, daß $n\varphi$ jedem beliebigen Bogen x gleich wird. Setzt man daher $n\varphi = x$,

---

* 1. Nach den Formeln (9) und (10) bildet man leicht folgende Tabelle:

$$\cos\varphi = \cos\varphi$$
$$2(\cos\varphi)^2 = \cos 2\varphi + 1$$
$$4(\cos\varphi)^3 = \cos 3\varphi + 3\cos\varphi$$
$$8(\cos\varphi)^4 = \cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3$$
$$16(\cos\varphi)^5 = \cos 5\varphi + 5\cos 3\varphi + 10\cos\varphi$$
$$32(\cos\varphi)^6 = \cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + 10$$
rc.

2. Nach den Formeln (11) und (12) bildet man leicht folgende Tabelle:

$$\sin\varphi = \sin\varphi$$
$$2(\sin\varphi)^2 = -\cos 2\varphi + 1$$
$$4(\sin\varphi)^3 = -\sin 3\varphi + 3\sin\varphi$$
$$8(\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3$$
$$16(\sin\varphi)^5 = \sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi$$
$$32(\sin\varphi)^6 = -\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi - 15\cos 2\varphi + 10$$
rc.

Die vorhergehenden zwei Tabellen leisten in der Integral-Rechnung gute Dienste.

so ist $n = \frac{x}{\varphi}$, und die beiden Formeln lassen sich schreiben, wie folgt:

$$(1)\ \cos x = (\cos\varphi)^n - \frac{x(x-\varphi)}{1\,.\,2}(\cos\varphi)^{n-2}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2$$
$$+ \frac{x(x-\varphi)(x-2\varphi)(x-3\varphi)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\cos\varphi)^{n-4}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^4 - \text{rc.}$$

$$(2)\ \sin x = \frac{x}{1}(\cos\varphi)^{n-1}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) - \frac{x(x-\varphi)(x-2\varphi)}{1\,.\,2\,.\,3}(\cos\varphi)^{n-3}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^3$$
$$+ \frac{x(x-\varphi)(x-2\varphi)(x-3\varphi)(x-4\varphi)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}(\cos\varphi)^{n-5}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^5 - \text{rc.}$$

Läßt man φ abnehmen bis 0, so wächst n bis ins Unendliche, und es verschwinden alsdann φ und n aus beiden Formeln, so, daß dieselben nur noch den Bogen x enthalten; was offenbar bei Formeln erzielt werden muß, welche den *Sinus* und *Cosinus* als Functionen dieses Bogens ausdrücken sollen. Für $\varphi = 0$ wird $\cos\varphi = 1$, sowie $\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$. Nehmen wir sofort an, daß auch die Potenzen von $\cos\varphi$ und $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ sämmtlich $= 1$ werden, wie groß auch die Exponenten seyn mögen, so verwandeln sich die Formeln in

$$(3)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \text{rc.}$$

$$(4)\ \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{rc.}$$

Da die Zahl n unendlich groß geworden ist, so laufen diese Reihen bis ins Unendliche fort. Sie verschaffen jedoch dessen ungeachtet die Werthe des *Sinus* und *Cosinus* auf sehr nahe hin, besonders wenn der Bogen x ein kleiner Bruch ist; und dieß ist der einzige Fall, in welchem die Mathematiker von diesen Reihen Gebrauch machen.

§. 95.

Auf den ersten Anblick scheint es evident zu seyn, wie wir angenommen haben, daß alle Potenzen von $\cos\varphi$ und $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ gleich

1 werden, wenn man φ bis 0 abnehmen läßt. Bei einer genauern Betrachtung erhebt sich aber eine Schwierigkeit, welche nun erörtert werden soll. Des bessern Verständnisses wegen werden wir hiebei etwas weit ausholen.

Es sey u^v ein Ausdruck, in welchem u und v zwei von einander ganz unabhängige Veränderliche darstellen. Sieht man nun v als eine positive constante Zahl an, und läßt u von 0 bis 1 wachsen, so wächst u^v selbst von 0 bis 1. Nimmt man hierauf u als constant und < 1 an, und legt v sehr große Werthe bei, so wird u^v sehr klein, und erreicht seine Grenze 0 für $u = + \infty$. Wir lassen endlich u von 0 bis 1 und zu gleicher Zeit v bis $+ \infty$ wachsen. So lange alsdann keine bestimmte Relation zwischen u und v vorhanden ist, kann man sich zwischen diesen Veränderlichen stets eine solche Verbindung denken, daß die Grenze von u^v, welche den Werthen $u = 1$ und $v = + \infty$ entspricht, entweder 0, 1, oder jede andere zwischen 0 und 1 fallende Größe ist; d. h. in diesem Falle herrscht wirkliche Unbestimmtheit.

Anders verhält es sich damit, wenn u und v keine unabhängige Veränderliche sind. Nehmen wir z. B. an, sie seyen zwei Functionen einer und derselben Veränderlichen t, und durch die Veränderung von t wachse u bis 1 und v bis $+ \infty$. Es ist alsdann zu untersuchen, wie sich die Zu- und Abnahme des Ausdruckes u^v gegen einander verhalten, welche respective durch das Größerwerden von u und v hervorgebracht werden; oder wenigstens nach der Composition von u und v als Functionen von t zu beurtheilen, welcher Grenze sich der Ausdruck u^v nähert. Gerade eine Schwierigkeit dieser Art bietet sich beim Uebergange der Formeln (1) und (2) in die Reihen (3) und (4) dar.

Hier sind φ und n die beiden Veränderlichen; sie sind unter sich verbunden durch die Relation $n\varphi = x$, welche verlangt, daß das Product $n\varphi$ stets einem gegebenen Bogen x gleich bleibe, wo übrigens x jeder beliebige Bogen seyn kann. Nun enthalten die Formeln (1) und (2) die Ausdrücke $(\cos x)^n$, $(\cos x)^{n-1}$, ..., in welchem man gleichzeitig $\varphi = 0$ und $n = + \infty$ zu substituiren hat; es ist daher nicht evident, daß die Grenzen dieser Ausdrücke gleich 1 seyen. Zudem enthalten diese Reihen auch noch verschiedene Potenzen von dem Verhältnisse des $\sin \varphi$ zum Bogen φ, und da n unendlich groß ist, so haben diese Reihen unendlich viele

Glieder; es können also die Exponenten dieser Verhältnisse in den beiden Reihen bis ins Unendliche zunehmen, wodurch dieselbe Schwierigkeit wieder entsteht. Folgende Erklärungen scheinen uns vor jedem Einwurfe geschützt zu seyn.

Kehren wir zu den Formeln (1) und (2) zurück, und setzen der Kürze halber

$$F = (\cos \varphi)^{n-m}\left(\frac{\sin \varphi}{\varphi}\right)^m,$$

so läßt sich das allgemeine Glied einer jeden dieser Formeln auf folgende Weise schreiben:

$$\pm \frac{x}{1}\left(\frac{x}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{2\varphi}{3}\right)\ldots\left(\frac{x}{m} - \frac{(m-1)\varphi}{m}\right)F,$$

wenn m für die Formel (1) eine gerade Zahl, und für die Formel (2) eine ungerade Zahl bezeichnet. Setzen wir hierauf $\varphi = 0$, und heißen M, was alsdann aus F wird, so verwandelt sich dieser allgemeine Ausdruck in

$$(5) \quad \pm \frac{Mx^m}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots m}.$$

Es ist somit M zu bestimmen. Nehmen wir nun an, φ sey kleiner als ein Quadrant, was erlaubt ist, da man $\varphi = 0$ setzen muß, so hat man $\varphi < \tang \varphi$, und diesem gemäß

$$F > (\cos x)^{n-m}\left(\frac{\sin \varphi}{\tang \varphi}\right)^m,$$

oder vereinfacht $F > (\cos \varphi)^n$.

Ferner ist $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$, also $\cos \varphi > \sqrt{1 - \varphi^2}$,

daher $F > \sqrt{(1 - \varphi^2)^{2n}}$.

Entwickelt man sofort die Potenz 2n, und erinnert sich, daß $n\varphi = x$, so erhält man

$$(1-\varphi^2)^{2n} = 1 - \frac{2n}{1}\varphi^2 + \frac{2n(2n-1)}{1 \, . \, 2}\varphi^4 - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}\varphi^6 + \text{etc.}$$

$$= 1 - \frac{2x}{1}\varphi + \frac{2x}{1}\left(\frac{2x}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\varphi^2 - \frac{2x}{1}\left(\frac{2x}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{2x}{3} - \frac{2\varphi}{3}\right)\varphi^3 + \text{etc.}$$

Um zu der Hypothese $\varphi = 0$ zu gelangen, kann man φ zuerst als äußerst klein annehmen. Alsdann ist klar, daß die auf einander folgenden Glieder dieser Reihe beständig kleiner werden; da sie nun abwechslungsweise positiv und negativ sind, so erhält man

ein zu kleines Resultat, wenn man sich auf die zwei ersten Glieder beschränkt; es ist also $(1-\varphi^2)^{2n} > 1-2\varphi x$, und mit noch größerem Rechte $F > \sqrt{1-2\varphi x}$.

Macht man $\varphi = 0$, so wird die Wurzelgröße $= 1$ und F gleich seiner Grenze M; woraus folgt, daß M nicht kleiner als 1 seyn kann. Ueberdieß ist die Function F ein Product aus zwei Factoren, welche nicht größer als 1 seyn können; also ist M auch nicht größer als 1; folglich $M = 1$. Diesem gemäß erhalten wir für das allgemeine Glied (5) der Reihen, welche *cos* x und *sin* x ausdrücken,

$$\pm \frac{x^m}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, \ldots \, m}.$$

Substituirt man in demselben successive $m = 0, 2, 4 \ldots\ldots$, sowie $m = 1, 3, 5, \ldots\ldots$, und wählt abwechslungsweise die Vorzeichen + und —, so ergeben sich die sämmtlichen Glieder der Reihen (3) und (4), deren Richtigkeit somit streng nachgewiesen ist *.

---

* Wir lassen noch ein Wort über die cyklischen Functionen, sowie die Entwicklung des Bogens als Function der Tangente folgen.

1. Substituirt man in der bekannten Exponentialreihe (deren Entwicklung weiter unten nachgetragen werden soll, siehe 3).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \frac{x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} + \frac{x^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} + \frac{x^5}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5} + \ldots$$

$x = x\sqrt{-1}$, so erhält man

$$e^{x\sqrt{-1}} = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \frac{x^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} - \frac{x^6}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5 \, . \, 6} + \ldots \\ + \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right) \end{cases}$$

Bezeichnet man hierauf die beiden letzten Reihen als eigenthümliche Functionen von x durch die Benennungen *cos* x und *sin* x, so wird

$$\text{(I)} \quad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x,$$

$$\text{(II)} \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x,$$

und man erhält nach (I) und (II)

durch Addition (III) $\cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$,

durch Subtraction (IV) $\sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$,

durch Multiplication (V) $1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$.

Weil man nun hier zwischen *Sinus* und *Cosinus* als aus Exponentialreihen abgeleiteten Functionen die nämliche Relation wieder erkennt, welche den gleichgenannten trigonometrischen Functionen eigenthümlich ist, so hat man obigen zwei Reihen den Namen cyklische Functionen beigelegt.

2. Nach (I) und (II) erhält man durch Logarithmiren

$$\text{(VI)}\quad x\sqrt{-1}\,\log e = \log(\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x)$$

in jedem Logarithmensysteme,

$$\text{und}\quad x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x)$$

im Neper'schen Logarithmensysteme,

$$\text{(VII)}\quad -x\sqrt{-1}\,\log e = \log(\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x)$$

in jedem Logarithmensysteme

$$\text{und}\quad -x\sqrt{-1} = l(\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x)$$

im Neper'schen Logarithmensysteme.

Es verschafft ferner (VI) — (VII)

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\left(\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x}\right),$$

$$\text{oder}\quad x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\,\text{tang}\,x}{1 - \sqrt{-1}\,\text{tang}\,x}\right).$$

Entwickelt man hierauf $l\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\,\text{tang}\,x}{1 - \sqrt{-1}\,\text{tang}\,x}\right)$ nach der bekannten logarithmischen Formel (deren Entwicklung weiter unten nachgetragen werden soll, siehe 4.)

$$l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \ldots\right)$$

so erhält man

$$\text{(VIII)}\quad x = \text{tang}\,x - \frac{1}{3}(\text{tang}\,x)^3 + \frac{1}{5}(\text{tang}\,x)^5 - \frac{1}{7}(\text{tang}\,x)^7 + \ldots$$

eine Reihe, welche nicht nur durch die Einfachheit ihres Bildungsgesetzes merkwürdig, sondern auch für die wirkliche Berechnung des Kreises, sowie aller Kreisfunctionen von der größten Wichtigkeit ist.

Sie verschafft

$$\text{(IX)}\quad \text{arc}\,45^0 = 0{,}5\,\text{Quadr.} = \text{arc}\,(\text{tang} = 1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

$$\text{(X)}\quad \text{arc}\,30^0 = \frac{1}{3}\,\text{Quadr.} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\right]$$

Die Reihe (IX), welche Leibnitz (geboren zu Leipzig 1646, gestorben zu Hannover 1716) im Jahre 1682 zuerst gefunden hat, convergirt zu schwach, um mit Erfolg zur wirklichen Berechnung gebraucht werden zu können.

Die Reihe (X) ist durch ihre starke Convergenz zur wirklichen Berechnung des Kreisbogens sehr brauchbar. Lagny (geboren zu Lyon 1660, gestorben zu Paris 1734), berechnete im Jahre 1719 nach derselben das

Verhältniß der Peripherie des Kreises ($= 12 \times arc\ 30^0$) zum Durchmesser auf 127 Decimalen genau, und fand die Peripherie des Kreises $= 3,14159265358979323846264338 3 \ldots\ldots$, indem er den Durchmesser $= 1$ setzte.

Für Kreisbögen $< 30^0$ oder unter $\frac{1}{3}$ Quadr. erhält man nach (VIII) Reihen, deren Convergenz noch größer ist, als die der Reihe (X); allein die Ausdrücke der Tangenten solcher Bögen sind zu complicirt, um mit gehörigem Erfolge in (VIII) substituirt werden zu können.

Euler gelang es, $arc\ 45^0$ in die Summe zweier Reihen aufzulösen, welche die Reihe (X) an Convergenz übertreffen.

Indem er nämlich $tang\ A = \frac{1}{2}$, $tang\ B = \frac{1}{3}$ setzte, fand er

$$tang\,(A + B) = \frac{tang\ A + tang\ B}{1 - tang\ A \,.\, tang\ B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 = tang\ 45^0,$$

wornach $arc\ 45^0 = A + B$;

ferner nach (VIII)

$$A = arc\left(tang = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots,$$

$$B = arc\left(tang = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \ldots,$$

also (XI) $arc\ 45^0 = arc\left(tang = \frac{1}{2}\right) + arc\left(tang = \frac{1}{3}\right)$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{5\,.\,4^2} - \frac{1}{7\,.\,4^3} + \ldots\right) \\ + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3\,.\,9} + \frac{1}{5\,.\,9^2} - \frac{1}{7\,.\,9^3} + \ldots\right) \end{array} \right\}$$

Machin, einem englischen Astronomen, gelang es, $arc\ 45^0$ in die Differenz zweier Reihen aufzulösen, welche die vorhergehenden Reihen an Convergenz weit hinter sich lassen.

Indem er nämlich $tang\ A = \frac{1}{5}$ setzte, fand er

$$tang\ 2A = \frac{2\ tang\ A}{1 - (tang\ A)^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12},$$

$$tang\ 4A = \frac{2\ tang\ 2A}{1 - (tang\ 2A)^2} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119},$$

$$tang\,(4A - arc\ 45^0) = \frac{tang\ 4A - tang\ 45^0}{1 + tang\ 4A \,.\, tang\ 45^0} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119} \cdot 1} = \frac{1}{239} = tang\ B,$$

$$\text{wornach } 4A - arc\, 45^0 = B,$$
$$\text{oder } arc\, 45^0 = 4A - B;$$

ferner nach (VIII)

$$A = arc\left(tang = \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \ldots,$$

$$B = arc\left(tang = \frac{1}{239}\right) = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7 + \ldots,$$

$$\text{also (XII) } arc\, 45^0 = 4\, arc\left(tang = \frac{1}{5}\right) - arc\left(tang = \frac{1}{239}\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \ldots\right] \\ -\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7 + \ldots\right] \end{array} \right\}$$

Diese Berechnung des $arc\ 45^0$ wurde erst nach der vorhergehenden Auflösung von Euler bekannt, obgleich sie Machin schon lange vorher, im Jahre 1706, erfunden und hiernach das Verhältniß der Peripherie des Kreises zum Durchmesser auf 100 Decimalen genau berechnet hatte.

Nach (XII) berechnete Vega das Verhältniß der Peripherie des Kreises zum Durchmesser auf 140 Decimalen genau.

Da sich von der Länge der Peripherie des Kreises leicht auf die Länge eines jeden beliebigen Kreisbogens schließen läßt, so begreift man nun, daß und wie sich mittelst der für $arc\ x$, $sin\ x$ und $cos\ x$ entwickelten Reihen der Kreis und alle Kreisfunctionen berechnen lassen.

3. Der größern Bequemlichkeit und Vollständigkeit wegen mag hier die Entwicklung der in 1. als bekannt vorausgesetzten Exponentialreihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

nachträglich einen Platz finden.

Für $x = 0$ wird $a^x = 1$. Wir setzen daher

$$\text{(I) } a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$

wo A, B, C, D, ... von x unabhängige, noch unbestimmte Coefficienten bezeichnen. Um diese zu finden, bedienen wir uns des Satzes

$$a^x \times a^y = a^{x+y}.$$

Substituirt man in (I) y, und hierauf x + y für x, so erhält man

$$\text{(II) } a^y = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots,$$

$$\text{(III) } a^{x+y} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \ldots,$$

ferner aus (I), (II) und (III), nach $a^x \times a^y = a^{x+y}$,

$$1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \ldots =$$
$$(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots).(1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots)$$

Führt man in dieser Gleichung die angedeuteten Operationen aus, und ordnet die Glieder in den beiden Theilen der Gleichung nach den Potenzen

von y, so müssen (nach dem Lehrsatze der unbestimmten Coefficienten) die Coefficienten einander gleich seyn, welche in den beiden Theilen der Gleichung zu den gleich hohen Potenzen der Veränderlichen y gehören. Betrachtet man daher nur diejenigen derselben, welche diese Veränderliche auf der ersten Potenz mit sich führen, so erhält man

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots = A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \ldots$$

Setzt man hierauf (nach dem Lehrsatze der unbestimmten Coefficienten) in dieser Gleichung die Coefficienten einander gleich, welche in den beiden Theilen der Gleichung zu den gleich hohen Potenzen der Veränderliche x gehören, so erhält man

$$2B = A^2, \text{ woraus } B = \frac{A^2}{1\,.\,2},$$

$$3C = AB, \text{ woraus } C = \frac{A^3}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$4D = AC, \text{ woraus } D = \frac{A^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

rc.

Substituirt man ferner die Werthe von B, C, D, ... in der Reihe (I), so verwandelt sie sich in

$$\text{(IV)}\ a^x = 1 + A\,.\,\frac{x}{1} + A^2\,.\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + A^3\,.\,\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + A^4\,.\,\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots$$

eine Reihe, in welcher der Werth von A noch zu bestimmen ist.

Um diesen zu finden, substituire man $x = \frac{1}{A}$ in (IV), und erhält

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots.,$$

eine Reihe, aus welcher man durch die Summation der 12 ersten Glieder $a^{\frac{1}{A}} = 2{,}7182818\ldots$ erhält. Diese Zahl machte Neper (geboren zu Marchiston in Schottland 1550, gestorben 1618), der Erfinder der Logarithmen, zur Basis seines Logarithmensystemes. Setzen wir sofort, wie dieß in der Analysis allgemein üblich ist,

$$a^{\frac{1}{A}} = 2{,}7182818\ldots = e,$$

so erhalten wir durch Logarithmiren

$$\frac{1}{A}\,\log a = \log e, \text{ woraus } A = \frac{\log a}{\log e}$$

in jedem Logarithmensysteme, und

$$\frac{1}{A}\,la = 1, \text{ wo } A = la$$

im Neper'schen Logarithmensysteme, wo $le = 1$.

Die Substitution des Werthes von A in (IV) verschafft endlich

(V) $a^x = 1 + \frac{log\ a}{log\ e} \cdot x + \left(\frac{log\ a}{log\ e}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{1\,.\,2} + \left(\frac{log\ a}{log\ e}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$

in jedem Logarithmensysteme, und

(VI) $a^x = 1 + la \cdot \frac{x}{1} + (la)^2 \cdot \frac{x^2}{1\,.\,2} + (la)^3 \cdot \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$

im Neper'schen Logarithmensysteme, welche Reihe für $a = e$ in folgende übergeht:

(VII) $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots.$

Substituirt man $x = mx$ in der Reihe (VI), so erhält man

$$a^{mx} = 1 + mla \cdot \frac{x}{1} + (mla)^2 \cdot \frac{x^2}{1\,.\,2} + (mla)^3 \cdot \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots,$$

und es ist daher, nach dem Satze $(a^x)^m = a^{mx}$,

(VIII) $\left[1 + la \cdot \frac{x}{1} + (la)^2 \cdot \frac{x^2}{1\,.\,2} + (la)^3 \cdot \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\right]^m$

$$= 1 + mla \cdot \frac{x}{1} + (mla)^2 \cdot \frac{x^2}{1\,.\,2} + (mla)^3 \cdot \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

eine sehr merkwürdige Entwicklung eines polynomischen Ausdruckes.

Substituirt man ferner $x = 1$ in der Reihe (VI), so erhält man

(IX) $a = 1 + \frac{mla}{1} + \frac{(mla)^2}{1\,.\,2} + \frac{(mla)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots,$

die Entwicklung einer Zahl nach den Potenzen ihres Logarithmen.

4. Der größern Bequemlichkeit und Vollständigkeit wegen wollen wir hier die in 2. als bekannt vorausgesetzte logarithmische Reihe

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots\right)$$

nachträglich auch noch entwickeln.

Für $x = 0$ wird $log\,(1 + x) = 0$. Wir setzen daher

(I) $log\,(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$

wo A, B, C, D, ... von x unabhängige, noch unbestimmte Coefficienten bezeichnen. Substituirt man hierauf in (I) $x + y$ für x, so erhält man

(II) $log\,(1+x+y) = A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \ldots$

Es ist aber $1 + x + y = (1 + x)\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)$,

also $log\,(1 + x + y) = log\,(1 + x) + log\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)$.

Wir substituiren daher in (I) $\frac{y}{1+x}$ für x, und erhalten

(III) $log\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)$

$$= \frac{Ay}{1+x} + B\left(\frac{y}{1+x}\right)^2 + C\left(\frac{y}{1+x}\right)^3 + D\left(\frac{y}{1+x}\right)^4 + \ldots$$

und (IV) $log\,(1 + x + y)$

$$= log\,(1 + x) + A\left(\frac{y}{1+x}\right) + B\left(\frac{y}{1+x}\right)^2 + C\left(\frac{y}{1+x}\right)^3 + \ldots,$$

ferner nach (II) und (IV)

$$A(x + y) + B(x + y)^2 + C(x + y)^3 + D(x + y)^4 + \ldots$$

$$= log\,(1 + x) + A\left(\frac{y}{1+x}\right) + B\left(\frac{y}{1+x}\right)^2 + C\left(\frac{y}{1+x}\right)^3 + \ldots$$

Führt man in dieser Gleichung die angedeuteten Operationen wirklich aus, und ordnet die Glieder in den beiden Theilen der Gleichung nach den Potenzen von y, so müssen (nach dem Lehrsatze der unbestimmten Coefficienten) die Coefficienten einander gleich seyn, welche in den beiden Theilen der Gleichung zu den gleich hohen Potenzen der Veränderlichen y gehören. Betrachtet man daher nur diejenigen derselben, welche diese Veränderliche auf der ersten Potenz mit sich führen, so erhält man

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots = \frac{A}{1+x},$$

welche Gleichung sich leicht in folgende umformen läßt:

$$(2B + A)x + (3C + 2B)x^2 + (4D + 3C)x^3 + \ldots = 0.$$

Annullirt man (nach dem Lehrsatze der unbestimmten Coefficienten) successive die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der Veränderlichen x, so erhält man

$$2B + A = 0,\ \text{woraus}\ B = -\frac{A}{2},$$

$$3C + 2B = 0,\ \text{woraus}\ C = \frac{A}{3},$$

$$4D + 3C = 0,\ \text{woraus}\ D = -\frac{A}{4},$$

ıc.

Werden diese Werthe von B, C, D, ... in der Reihe (I) substituirt, so verwandelt sie sich in

$$log\,(1 + x) = Ax - \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4} + \ldots$$

oder (V) $log\,(1 + x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$

Um in dieser Reihe den Werth von A auszumitteln, bringen wir sie unter die Form

(VI) $\frac{log\,(1 + x)}{x} = A\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots\right).$

Macht man in dieser Gleichung $x = 0$, so reducirt sich ihr zweiter Theil auf A, indeß ihr erster Theil $= \frac{0}{0}$, also unbestimmt wird. Um nun den wahren Werth dieses unbestimmten Ausdruckes zu finden, substituiren wir im ersten Theile dieser Gleichung $x = \frac{1}{n}$, und erhalten

$$\frac{\log(1+x)}{x} = n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Es ist aber (nach dem binomischen Lehrsatze)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \ldots$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4n}\right) + \ldots$$

eine Reihe, deren zweiter Theil sich für $x = 0$, welcher Annahme nach der obigen Substitution $n = \infty$ entspricht, auf

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots = e$$

reducirt [vergl. 3, (IV)]; also $A = \log e$ und nach der Reihe (V)

$$\text{(VII)}\ \log(1+x) = \log e\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$$

in jedem Logarithmensysteme, und

$$\text{(VIII)}\ l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

im Neper'schen Logarithmensysteme, da $le = 1$.

Substituirt man in der letzten Reihe $-x$ für x, so erhält man

$$\text{(IX)}\ l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots,$$

und, indem man die Reihe (IX) von der Reihe (VIII) subtrahirt und bemerkt,

$$\text{daß}\ l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$\text{(X)}\ l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Substituirt man in dieser Reihe

$$\frac{1+x}{1-x} = y,\ \text{woraus}\ x = \frac{y-1}{y+1},$$

so verwandelt sie sich in

$$\text{(XI)}\ ly = 2\left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

eine Reihe, nach welcher z. B.

$$l2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right],$$

$$l5 = 2\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \ldots\right],$$

$$l11 = 2\left[\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \ldots\right],$$

2c.

Aus diesen Beispielen erkennt man, daß die Convergenz der Reihe (XI) mit der Größe der Zahlen abnimmt, deren Logarithmen berechnet werden.

Setzt man ferner

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{n},$$

woraus $x = \frac{z}{2n+z}$, so wird

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = l\left(1 + \frac{z}{n}\right) = l\left(\frac{n+z}{n}\right) = l(n+z) - ln,$$

und die Reihe (X) nimmt folgende Form an:

$$\text{(XII)} \quad l(n+z) = ln + 2\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \ldots\right],$$

welche Reihe unter allen bis jetzt bekannten Reihen für die wirkliche Berechnung der Neper'schen Logarithmen am brauchbarsten ist. Nach derselben erhält man z. B.

$$l2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right],$$

$$l3 = l2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \ldots\right],$$

$$l4 = l2^2 = 2l2,$$

$$l5 = l4 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \ldots\right],$$

$$l6 = l(3 \,.\, 2) = l3 + l2,$$

$$l7 = l6 + 2\left[\frac{1}{13} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{13}\right)^5 + \ldots\right],$$

$$l10 = l(2 \,.\, 5) = l2 + l5,$$

$$l11 = l10 + 2\left[\frac{1}{21} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{21}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{21}\right)^5 + \ldots\right],$$

2c.

Die Reihe (XII) ist für die wirkliche Berechnung der Logarithmen namentlich darum sehr brauchbar, weil ihre Convergenz mit der Größe der Zahlen zunimmt, deren Logarithmen berechnet werden, wie aus den vorhergehenden Beispielen erhellt. Sie verschafft mit großer Leichtigkeit und

Genauigkeit die Logarithmen aller ganzen Zahlen und kann sogar zur Berechnung solcher Zahlen gebraucht werden, welche die schon berechnete Zahlen der Logarithmentafeln an Größe weit übertreffen. Um z. B. $l849511$ nach dieser Reihe zu finden, wenn nur die Logarithmen aller ganzen Zahlen unter 10000 als schon berechnet vorausgesetzt werden dürfen, setzen wir $n = 849500$, $z = 11$, und erhalten

$$l849511 = l849500 + 2\left[\frac{11}{1699011} + \frac{1}{3}\left(\frac{11}{1699011}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{11}{1699911}\right)^5 + \ldots\right].$$

Substituirt man $x = 1$ in der Reihe (IX), so erhält man

$$lo = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right).$$

Da nun $lo = -\infty$, so folgt hieraus, daß

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

keine convergente Reihe ist.

Substituirt man $y = \infty$ in der Reihe (XI), so erhält man

$$l\,\infty = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Da nun $l\,\infty = \infty$, so folgt hieraus, daß

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

keine convergente Reihe ist.

Siebente Abhandlung.

Die trigonometrische Auflösung der binomischen Gleichungen von jedem Grade.

Die Auflösung der binomischen Gleichungen*.

§. 96.

Es sey die Gleichung $y^n = \pm A$: heißen wir a irgend eine der n Wurzeln von A, und substituiren $y = ax$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$x^n = \pm 1.$$

---

* Der Vollständigkeit und des bessern Verständnisses wegen fügen wir hier das Wichtigste über die algebraische Auflösung der binomischen Gleichungen (aus Fourcy's Leçons d'algèbre) bei.

1. Binomisch nennt man solche Gleichungen, welche sich auf die Form

$$\text{(I)}\ x^m = A \text{ oder } x^m - A = 0$$

zurückführen lassen, wo A irgend eine bekannte Größe bezeichnet.

Man bemerkt sogleich, daß ihre Wurzeln sämmtlich von einander verschieden sind, da die Ausdrücke $x^m - A$ und mx^{m-1} keine gemeinschaftlichen Theiler haben. Der Gleichung (I) entsprechen demnach m verschiedene Wurzeln.

Da diese Wurzeln, auf die mte Potenz erhoben, A hervorbringen müssen, so sind sie nichts anderes, als die Werthe des Ausdruckes

$$x = \sqrt[m]{A}.$$

Hiedurch ist also bewiesen, daß diese Wurzelgröße m verschiedene Werthe hat.

2. Wenn m eine zusammengesetzte Zahl ist, so läßt sich die Auflösung der Gleichung (I) auf die mehrerer binomischen Gleichungen zurückführen,

Wir betrachten nun zuerst den Fall

$$(1)\quad x^n = + 1.$$

---

deren Grade die Factoren von m ausdrücken. Setzen wir z. B. $m = pqr$: so kann man anstatt der Gleichung $x^{pqr} = A$ die Gleichungen

$$x^p = x', \quad x'^q = x'', \quad x''^r = A$$

auflösen, wo x' und x'' neue Unbekannte sind. Denn es ist klar, daß zuerst die Gleichung $x''^r = A$ alle Werthe von x'', hierauf die Gleichung $x'^q = x''$, alle Werthe von x', endlich die Gleichung $x^p = x'$ alle Wurzeln der gegebenen Gleichung verschafft.

Aus dieser Bemerkung erhellt aufs Neue die Richtigkeit folgender, aus der Theorie der Wurzelgrößen bekannten Formel:

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{A}}} = \sqrt[pqr]{A}.$$

3. Bezeichnen wir mit a eine Größe, deren mte Potenz A ist, und setzen $x = ay$, so verwandelt sich die Gleichung $x^m = A$ in $a^m y^m = a^m$,

$$\text{woraus } y^m = 1;$$

$$\text{also } y = \sqrt[m]{1} \text{ und } x = a\sqrt[m]{1}.$$

Hieraus folgt, daß man die Wurzeln der Gleichung $x^m = A$ erhält, wenn man irgend eine derselben mit den Wurzeln der Gleichung $y^m = 1$ multiplicirt, oder, was damit einerlei ist, daß man die Werthe der $\sqrt[m]{A}$ erhält, wenn man irgend einen derselben mit den Werthen der $\sqrt[m]{1}$ multiplicirt.

4. Wir betrachten insbesondere den Fall, in welchem A eine reelle Größe ist, und schreiben, zur Unterscheidung von $+ A$ und $- A$, die binomische Gleichung auf folgende Weise:

$$x^m = \pm A.$$

Da man eine solche positive Größe a, wenigstens durch Näherung, finden kann, daß $a^m = A$, so setzen wir wieder $x = ay$, wodurch sich die obige Gleichung in

$$y^m = \pm 1$$

verwandelt, eine Gleichung, mit der wir uns nun ausschließlich beschäftigen werden.

5. Ueber diese Gleichung lassen sich folgende Bemerkungen machen:

Ist m eine ungerade Zahl, so entspricht der Gleichung $y^m = 1$ oder $y^m - 1 = 0$ offenbar die Wurzel $y = 1$. Sie hat keine andere reelle

Setzt man

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi,$$

Wurzel mehr; denn bei jedem andern positiven Werthe von y würde $y^m > 1$, oder $y^m < 1$, und jeder negative Werth von y würde y^m negativ machen. Um die Gleichung zu erhalten, von welcher die $m - 1$ imaginären Wurzeln abhängen, dividire man $y^m - 1 = 0$ durch $y - 1$, wodurch man folgende reciproke Gleichung erhält:

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \ldots + y + 1 = 0.$$

Ist m eine ungerade Zahl, so entspricht der Gleichung $y^m = -1$ oder $y^m + 1 = 0$ offenbar die Wurzel $y = -1$. Daß die übrigen Wurzeln imaginär sind, läßt sich auf ähnliche Weise darthun, wie vorhin; und um die Gleichung zu erhalten, von der diese imaginären Wurzeln abhängen, darf man nur $y^m + 1 = 0$ durch $y + 1$ dividiren. Für das Aufsuchen aller Wurzeln der Gleichung $y^m = -1$ ist es jedoch einfacher, zu bemerken, daß letztere aus der Gleichung $y^m = 1$ entsteht, wenn man y in $-y$ verwandelt; wornach es also genügt, alle Wurzeln der Gleichung $y^m = 1$ mit den entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen.

Setzen wir $m = 2n$, d. h. gleich einer geraden Zahl, so entsprechen der Gleichung $y^{2n} = 1$ oder $y^{2n} - 1 = 0$ die zwei Wurzeln $y = 1$, $y = -1$. Die übrigen Wurzeln sind imaginär, und die Gleichung, welche diese imaginären Wurzeln in sich faßt, erhält man, indem man $y^{2n} - 1 = 0$ durch $(y - 1)(y + 1) = y^2 - 1$ dividirt; es wird jedoch besser seyn, zu bemerken, daß $y^{2n} - 1 = (y^n - 1)(y^n + 1)$, wornach also die Gleichung $y^{2n} - 1$ durch folgende zwei einfachere Gleichungen ersetzt werden kann:

$$y^n - 1 = 0,\ y^n + 1 = 0.$$

Was endlich die Gleichung $y^{2n} = -1$ oder $y^{2n} + 1 = 0$ betrifft, so bemerken wir, daß die geraden Potenzen aller reellen Zahlengrößen stets positive Resultate geben, woraus folgt, daß die vorliegende Gleichung lauter imaginäre Wurzeln hat. Substituirt man in dieser Gleichung $y^2 = z$ so kommt sie auf den nten Grad herab, indem sie sich in $z^n = 1$ verwandelt.

6. Wir wollen nun die Gleichungen $y^m - 1 = 0$ und $y^m + 1 = 0$ in einigen besonderen Fällen wirklich auflösen.

Für $m = 2$ erhält man die Gleichungen

$$y^2 - 1 = 0, \text{ woraus } y = \pm 1,$$

$$\text{und } y^2 + 1 = 0, \text{ woraus } y = \pm\sqrt{-1}.$$

Für $m = 3$ erhält man die Gleichungen

$$y^3 - 1 = 0 \text{ und } y^3 + 1 = 0.$$

Was die Gleichung $y^3 - 1 = 0$ betrifft, so erkennt man sogleich,

so ist nach der Moivre'schen Formel $x^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi$; und es geben die sämmtlichen Werthe von φ, welche der Gleichung

$$\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi = +1$$

entsprechen, Wurzeln der Gleichung (1) ab.

---

daß sie $y = 1$ zur Wurzel hat; wird sie hierauf durch $y - 1$ dividirt, so erhält man die Gleichung

$$y^2 + y + 1 = 0, \text{ woraus } y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Obige Gleichung hat also folgende drei Wurzeln:

$$y = 1,\ y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},\ y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Um die Wurzeln der Gleichung $y^3 + 1 = 0$ zu erhalten, darf man nur die Wurzeln der Gleichung $y^3 - 1 = 0$ mit den entgegengesetzten Vorzeichen nehmen, und erhält:

$$y = -1,\ y = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},\ y = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Für $m = 4$ erhält man die Gleichungen

$$y^4 - 1 = 0 \text{ und } y^4 + 1 = 0.$$

Die Gleichung $y^4 - 1 = 0$ läßt sich in die Gleichungen

$$y^2 - 1 = 0,\ y^2 + 1 = 0$$

auflösen, welche folgende vier Wurzeln abgeben:

$$y = \pm 1,\ y = \pm \sqrt{-1}.$$

Addirt man in der Gleichung $y^4 + 1 = 0$ auf beiden Seiten $2y^2$, so erhält man

$$(y^2 + 1)^2 = 2y^2$$

$$\text{oder } (y^2 + 1)^2 - (y\sqrt{2})^2 = 0,$$

welche Gleichung sich in die Gleichungen

$$y^2 + 1 + y\sqrt{2} = 0,\ y^2 + 1 - y\sqrt{2} = 0$$

zerfällen läßt, die folgende vier Wurzeln abgeben:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2},\ y = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2},$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2},\ y = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2}.$$

Erhebt man sich zu den folgenden höheren Graden, so wird man erkennen, daß die Gleichung $y^m \mp 1 = 0$ bis zum zehnten Grade entweder durch die vorhergehenden Fälle, oder durch reciproke Gleichungen aufgelöst werden kann, welche sich unter den fünften Grad herabbringen lassen. Durchlaufen wir zuerst die ungeraden Grade.

Die Gleichung

$$y^5 - 1 = 0,$$

Die Anwendung, welche hier von der Moivre'schen Formel gemacht wird, setzt bloß voraus, daß sie für ganze positive Exponenten nachgewiesen worden sey.

---

welche $y = 1$ zur Wurzel hat, verwandelt sich, wenn sie durch $y - 1$ dividirt wird, in

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0,$$

eine reciproke Gleichung, welche sich auf den zweiten Grad erniedrigen läßt. Zu diesem Behufe bringe man sie zuerst unter die Form

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0,$$

setze hierauf $y + \frac{1}{y} = z$, wodurch man (siehe weiter unten)

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2,$$

und statt obiger Gleichung

$$z^2 + z - 1 = 0 \text{ erhält,}$$

$$\text{woraus } z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Die Werthe von y ergeben sich sofort durch die Relation $y + \frac{1}{y} = z$. In der That, diese Relation verschafft

$$y = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

in welchem Ausdrucke man successive die beiden Werthe von z zu substituiren hat, um die vier imaginären Werthe von y zu finden. Gesellt man zu diesen noch $y = 1$, so erhält man folgende fünf Wurzeln der Gleichung $y^5 - 1 = 0$:

$$y = 1,$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \sqrt{-1},$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \sqrt{-1},$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \sqrt{-1},$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \sqrt{-1}.$$

Die Gleichung

$$y^7 - 1 = 0$$

verwandelt sich durch die Division von $y - 1$ in

$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0,$$

Damit der letzten Gleichung Genüge geschehe, muß der imaginäre Theil $\sqrt{-1}\ \sin n\varphi$ verschwinden, woraus folgt, daß $n\varphi$

---

eine reciproke Gleichung, welche unter der Form

$$\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0$$

durch die Substitution von $y + \frac{1}{y} = z$ auf folgende Gleichung des dritten Grades erniedrigt werden kann:

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0.$$

Multiplicirt man nämlich $y^n + \frac{1}{y^n}$ mit $y + \frac{1}{y}$, so erhält man auf eine allgemeine Weise:

$$\left(y^n + \frac{1}{y^n}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = \left(y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}}\right) + \left(y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}}\right),$$

wornach, wenn $y + \frac{1}{y} = z$ gesetzt wird,

$$y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}} = \left(y^n + \frac{1}{y^n}\right)z - \left(y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}}\right),$$

eine Formel, nach welcher

$$y + \frac{1}{y} = z,$$

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2,$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = z^3 - 3z,$$

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = z^4 - 4z^2 + 2,$$

$$y^5 + \frac{1}{y^5} = z^5 - 5z^3 + 5z,$$

ıc.

Die Gleichung

$$y^9 - 1 = 0$$

verwandelt sich durch die Division von $y - 1$ in

$$y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0,$$

eine reciproke Gleichung, welche unter der Form

$$\left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right) + \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0$$

durch die Substitution von $y + \frac{1}{y} = z$ auf folgende Gleichung des vierten Grades erniedrigt werden kann:

$$z^4 + z^3 - 3z^2 - 2z + 1 = 0.$$

ein Vielfaches der halben Peripherie ist. Ferner muß $\cos n\varphi = 1$ seyn, woraus folgt, daß $n\varphi$ ein gerades Vielfaches der halben

---

Um die Wurzeln der Gleichungen

$$y^5 + 1 = 0,\ y^7 + 1 = 0,\ y^9 + 1 = 0$$

zu erhalten, darf man nur respective die Wurzeln der Gleichungen

$$y^5 - 1 = 0,\ y^7 - 1 = 0,\ y^9 - 1 = 0$$

mit den entgegengesetzten Vorzeichen nehmen.

Durchlaufen wir die geraden Grade. Die Gleichungen $y^6 - 1 = 0$, $y^8 - 1 = 0$, $y^{10} - 1 = 0$ bieten keine Schwierigkeit dar, indem sich jede derselben in zwei Gleichungen zerlegen läßt, deren Wurzeln bekannt sind.

Es sind nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$y^6 - 1 = 0$$

die der Gleichungen $y^3 + 1 = 0$ und $y^3 - 1 = 0$,
die Wurzeln der Gleichung

$$y^8 - 1 = 0$$

die der Gleichungen $y^4 + 1 = 0$ und $y^4 - 1 = 0$,
die Wurzeln der Gleichung

$$y^{10} - 1 = 0$$

die der Gleichungen $y^5 + 1 = 0$ und $y^5 - 1 = 0$.

Nimmt man $+1$ anstatt -1, so sind die analogen Gleichungen

$$y^6 + 1 = 0, \text{ woraus } y = \sqrt[6]{-1} = \sqrt{\sqrt[3]{-1}};$$

$$y^8 + 1 = 0, \text{ woraus } y = \sqrt[8]{-1} = \sqrt{\sqrt[4]{-1}};$$

$$y^{10} + 1 = 0, \text{ woraus } y = \sqrt[10]{-1} = \sqrt{\sqrt[5]{-1}}.$$

Da man nun die Werthe der $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[5]{-1}$ kennt, so darf man nur noch die Quadratwurzeln aus diesen Ausdrücken ausziehen, was sich nach den bekannten Formeln

$$\sqrt{A + B\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}} . \sqrt{-1},$$

$$\sqrt{A - B\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}} . \sqrt{-1}$$

leicht bewerkstelligen läßt.

7. Für die vollständigen Gleichungen des dritten und vierten Grades, auf welche die Gleichungen $y^7 - 1 = 0$ und $y^9 - 1 = 0$ geführt haben,

Peripherie ist, bezeichnet man daher mit H die halbe Peripherie und mit 2k irgend eine gerade Zahl, so muß

$$n\varphi = 2kH, \text{ also } \varphi = \frac{2kH}{n}$$

und $x = \cos\frac{2kH}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2kH}{n}$ seyn.

---

gibt es allgemeine Auflösungs-Methoden. Wir beschränken uns hier, zu bemerken, daß mit diesen Methoden auch die Auflösungen der zehn ersten Grade der Gleichung $y^m \mp 1 = 0$ schon längst bekannt waren. Von den höheren Graden konnte man, nach der in 2. gemachten Bemerkung, diejenigen als bekannt ansehen, deren Exponenten aus den Primfactoren 2, 3, 5, 7, zusammengesetzte Zahlen sind. Sobald man aber zu der Gleichung $y^{11} - 1 = 0$ überging, war alles, was man vermochte, diese Gleichung auf eine vollständige Gleichung des fünften Grades zurückzuführen, welche nicht weiter aufgelöst werden konnte.

So stand es mit der Theorie der binomischen Gleichungen, als Vandermonde im Jahre 1771 ein schönes Memoir über die allgemeine Auflösung der Gleichungen herausgab, welches eine Auflösung der Gleichung $y^{11}-1=0$ enthält. Sie ist aber als ein Resultat seiner allgemeinen Methode anzusehen und blieb lange Zeit unverstanden. Sie war es noch im Jahre 1801, als Gauss ein eben so originelles als geistreiches Verfahren für die Auflösung aller Grade der Gleichung $y^n - 1 = 0$ bekannt machte. Lagrange vervollkommnete später dieses Verfahren in seinem trefflichen Werke über die Auflösung der numerischen Gleichungen. Uebrigens sind die Ausdrücke, welche die Gauss'sche Auflösungsweise für die Wurzeln verschafft, wegen der vielen imaginären Größen, welche sie enthalten, wenig brauchbar; und wenn man dieselben unter der einfachen Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ erhalten will, so ist es rathsamer, seine Zuflucht zur trigonometrischen Auflösung der binomischen Gleichungen zu nehmen.

8. In 6. haben wir durch die Auflösung der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ folgende drei Werthe für die dritte Wurzel aus 1 gefunden:

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Jeder der beiden imaginären Werthe bringt, wenn er ins Quadrat erhoben wird, den andern imaginären Werth hervor; denn

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{(-1)^2 + (\sqrt{-3})^2 - 2\sqrt{-3}}{4}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{(-1)^2 + (\sqrt{-3})^2 + 2\sqrt{-3}}{4}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Setzt man anstatt + überall — vor $\sqrt{-1}$, so bleibt das Raisonnement dasselbe: man findet somit Wurzeln der Gleichung

---

Da ferner jeder Werth der dritten Wurzel aus 1, auf die erste Potenz erhoben, sich selbst und, auf die dritte Potenz erhoben, 1 hervorbringt: so folgt hieraus, daß durchs Potenziren eines imaginären Werthes der dritten Wurzel aus 1 alle Werthe dieser Wurzelgröße entstehen.

Von den dritten Wurzeln aus 1 gehen wir zu den Wurzeln aus 1 von jedem Grade über, und werden nun beweisen, daß bei jedem Grade alle Wurzeln aus 1 durchs Potenziren einer imaginären Wurzel entstehen.

Betrachten wir die Gleichung

$$(1)\ y^m - 1 = 0,$$

und nehmen an, m sey eine Primzahl.

Bezeichnet nun a irgend eine imaginäre Wurzel dieser Gleichung, so muß $a^m = 1$ und diesem gemäß, wenn n irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl ausdrückt,

$$a^{mn} = 1 \text{ oder } (a^n)^m = 1$$

seyn, was beweist, daß alle Potenzen von a der Gleichung (1) als Wurzeln entsprechen.

Man erhält dessen ungeachtet nicht mehr als m Werthe für y; denn aus $a^m = 1$ folgert man

$$a^{m+1} = a,\ a^{m+2} = a^2, \text{ꝛc.},$$

d. h. über a^m hinaus erhält man keine weiteren Wurzeln mehr. Ebenso verhält es sich mit den Potenzen, welche negative Exponenten haben, wie aus folgenden Gleichungen erhellt:

$$a^{m-1} = a^m \times a^{-1} = a^{-1},\ a^{m-2} = a^m \times a^{-2} = a^{-2}, \text{ꝛc.}$$

Es ist ferner im vorliegenden Falle, wo m eine Primzahl bezeichnet, leicht nachzuweisen, daß die Größen 1, $a, a^2, \ldots a^{m-1}$ sämmtlich von einander verschieden sind. In der That, nehmen wir für den Augenblick an, es könnte $a^{n+r} = a^n$ seyn, wenn n und n + r zwei Zahlen ausdrücken, welche kleiner als m sind: so müßte $a^r = 1$, und folglich a eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen

$$y^r - 1 = 0 \text{ und } y^m - 1 = 0$$

seyn, was im vorliegenden Falle, wo m eine Primzahl bezeichnet, unmöglich ist, weil der größte gemeinschaftliche Theiler dieser Gleichungen y — 1 ist.

Die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1) sind also

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ a^{m-1}.$$

Diese merkwürdige Eigenthümlichkeit der Wurzeln aus 1 dehnt sich

$x^n = 1$, indem man alle Werthe von x sucht, welche der Formel

$$(\alpha)\ x = \cos \frac{2kH}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2kH}{n} \text{ entsprechen.}$$

Die Gleichung (1) hat n Wurzeln, und man weiß, daß sie sämmtlich von einander verschieden sind. Legt man nun in der obigen Formel k alle mögliche ganze, sowohl positive als negative, Zahlenwerthe bei, so erhält man für x, wie wir zeigen werden, n verschiedene Werthe und nicht mehr: diese n Werthe machen alsdann die n Wurzeln der Gleichung (1) aus.

Zuerst bemerken wir, daß es unnütz sey, k negative Werthe beizulegen. Denn setzt man $-k$ anstatt $+k$, so ändern sich dadurch die beiden Werthe der Formel (α) nur in so weit, als jeder Werth in den andern übergeht.

Es ist ferner überflüssig, $k = n$ oder $> n$ zu setzen, denn subtrahirt man von k das größte Vielfache von n, welches in k enthalten ist, oder was auf dasselbe hinausläuft, subtrahirt man von dem Bogen $\frac{2kH}{n}$ eine Peripherie, oder mehrere Peripherien, so ändert sich weder der *Cosinus*, noch der *Sinus*.

Betrachtet man endlich zwischen 0 und n die von diesen beiden Größen gleich weit abstehenden Zahlen k' und $n - k'$, so entsprechen denselben gleiche Werthe von x. In der That, wird $k = n - k'$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} x &= \cos \frac{2(n-k')H}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2(n-k')H}{n} \\ &= \cos \frac{-2k'H}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{-2k'H}{n} \\ &= \cos \frac{2k'H}{n} \mp \sqrt{-1} \sin \frac{2k'H}{n}, \end{aligned}$$

dieselben Werthe, welche auch die Substitution $k = k'$ verschafft.

---

auch auf den Fall aus, in welchem m eine zusammengesetzte Zahl ist; alsdann aber hat man unter den imaginären Wurzeln eine Wahl zu treffen, um eine zu erhalten, deren Potenzen alle Wurzeln der Gleichung abgeben. Da jedoch die vollständige Discussion dieses zweiten Falles schwierig ist, und wir in der Folge auch nur von dem ersten Falle Gebrauch machen werden, so mag das hierüber Gesagte genügen.

Es ist also unnütz, k Werthe beizulegen, welche $> \frac{1}{2}$ n sind; man mag demnach n als eine gerade Zahl, $= 2p$, oder als eine ungerade Zahl, $= 2p + 1$, ansehen, so genügt es, für k die Zahlenwerthe $0, 1, 2, \ldots p$ zu substituiren *.

---

* 1. Um die Gleichung $x^4 = 1$ mittelst der Formel

$$x = \cos \frac{2kH}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2kH}{n}$$

aufzulösen, setzen wir $n = 4$, und erhalten

$$x = \frac{k \cdot 180^0}{2} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{k \cdot 180^0}{2};$$

substituiren ferner in dieser Formel successive $k = 0, 1, 2$ und finden, den Radius $= 1$ gesetzt,

$$x = \cos\ 0^0 \pm \sqrt{-1} \sin\ 0^0 = 1,$$
$$x = \cos\ 90^0 \pm \sqrt{-1} \sin\ 90^0 = \pm \sqrt{-1},$$
$$x = \cos 180^0 \pm \sqrt{-1} \sin 180^0 = -1,$$

wornach also $1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 = 1$ sind. (Vergl. §. 96, Note, 6.)

2. Um die Gleichung $x^6 = 1$ mittelst der Formel

$$x = \cos \frac{2kH}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2kH}{n}$$

aufzulösen, setzen wir $n = 6$, und erhalten

$$x = \cos \frac{k \cdot 180^0}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{k \cdot 180^0}{3};$$

substituiren ferner in dieser Formel successive $k = 0, 1, 2, 3$ und finden, den Radius $= 1$ gesetzt,

$$x = \cos\ 0^0 \pm \sqrt{-1} \sin\ 0^0 = 1,$$
$$x = \cos\ 60^0 \pm \sqrt{-1} \sin\ 60^0,$$
$$x = \cos 120^0 \pm \sqrt{-1} \sin 120^0,$$
$$x = \cos 180^0 \pm \sqrt{-1} \sin 180^0 = -1.$$

Da nun bekanntlich

$$\sin\ 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2},$$

$$\sin\ 60^0 = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\sin 120^0 = \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2},$$

Wir haben nun nachzuweisen, daß auf diese Weise die Formel (α) alle Wurzeln der Gleichung (1) verschafft.

Ist die Gleichung (1) von der Form

$$x^{2p} = 1,$$

so geht die Formel (α) über in

$$x = \cos \frac{kH}{p} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{kH}{p}.$$

Durch die Substitution von $k = 0$ und $k = p$ findet man $x = +1$ und $x = -1$. Für die dazwischen liegenden Zahlenwerthe $1, 2, 3, \ldots p-1$ ist der Bogen zwischen 0 und 180° inbegriffen; also verschwindet der mit $\sqrt{-1}$ multiplicirte *Sinus* nicht, und die Werthe von x sind somit imaginär. Es sind ferner die letzten Werthe sämmtlich von einander verschieden: denn in den zwei conjugirten Wurzeln, welche mit einander ein Wurzelpaar ausmachen, d. h. welche durch die Substitution eines und desselben Werthes von k entstehen, hat die darin vorkommende imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ entgegengesetzte Vorzeichen, und in den Wurzelpaaren, welche man durch die Substitution der verschiedenen Werthe von k erhält, sind die reellen Theile verschieden von einander, insofern sie *Cosinus* von verschiedenen Bögen sind, welche von 0 bis 180° wachsen. Nimmt man also die zwei reellen Wurzeln $+1$ und -1 mit den $2p-2$ imaginären Wurzeln zusammen, so hat man im Ganzen, wie es seyn soll, 2p verschiedene Wurzeln der Gleichung $x^{2p} = 1$.

Ist die Gleichung (1) von der Form

$$x^{2p+1} = 1,$$

---

so wird

$$\cos 60° \pm \sqrt{-1} \sin 60° = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1},$$

$$\cos 120° \pm \sqrt{-1} \sin 120° = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1},$$

wornach also $1, -1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ die sechs Wurzeln der Gleichung $x^6 = 1$ sind. (Vergl. §. 96, Note, 6.)

so geht die Formel (α) über in

$$x = \cos \frac{2kH}{2p+1} \pm \sqrt{-1}\ \sin \frac{2kH}{2p+1}.$$

In diesem Falle gibt es nur die einzige reelle Wurzel $x = +1$, welche $k = 0$ entspricht; alle übrigen Wurzeln sind imaginär, und die Anzahl der sämmtlichen Wurzeln ist natürlich gleich dem Exponenten $2p + 1$.

Wir betrachten sofort die Gleichung

$$(2)\quad x^n = -1.$$

Setzt man

$$x = \cos \varphi \pm \sqrt{-1}\ \sin \varphi,$$

so erhält man $x^n = \cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\ \sin n\varphi$. Man findet daher Wurzeln der Gleichung $x^n = -1$, indem man die Werthe von φ sucht, welche der Gleichung

$$\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\ \sin n\varphi = -1$$

entsprechen: es muß also $\sin n\varphi = 0$ und $\cos n\varphi = -1$ seyn. Hieraus folgt, daß der Bogen $n\varphi$ ein gerades Vielfaches von H ist. Wir setzen daher

$$n\varphi = (2k + 1)H, \text{ woraus } \varphi = \frac{(2k + 1)H}{n}$$

$$\text{und } x = \cos \frac{(2k + 1)H}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin \frac{(2k + 1)H}{n}.$$

Man wird keine negative Vielfache von H substituiren, indem man dadurch dieselben Werthe für x erhielte, welche die positiven Vielfachen von H verschaffen. Ferner wird man weder $k = n$, noch $k > n$ wählen; denn subtrahirt man von k das größte Vielfache von n, welches in k enthalten ist, so vermindert man dadurch den Bogen $\frac{(2k + 1)H}{n}$ um eine Peripherie, oder um mehrere Peripherien, was weder den *Sinus*, noch den *Cosinus* ändert. Substituirt man $k = n - 1$, so erhält man

$$x = \cos \frac{(2n-1)H}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin \frac{(2n-1)H}{n}$$

$$= \cos \frac{-H}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin \frac{-H}{n} = \cos \frac{H}{n} \mp \sqrt{-1}\ \sin \frac{H}{n}.$$

Es sind dieß die nämlichen Werthe, welche auch der Annahme $k = 0$ entsprechen; überhaupt verschaffen die Werthe von k, welche gleichweit von 0 und $n-1$ abstehen, die nämlichen Werthe für x. In der That, wenn man $k = n-1-k'$ setzt, so wird

$$x = \cos\frac{(2n-2k'-1)H}{n} \mp \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2n-2k'-1)H}{n}$$

$$= \cos\frac{(2k'+1)H}{n} \mp \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k'+1)H}{n}$$

ein Resultat, welches auch durch die Substitution von $k = k'$ entsteht. Hieraus folgt, daß man die sämmtlichen Werthe von x erhält, indem man k alle ganze positive Zahlenwerthe beilegt, welche $\frac{1}{2}(n-1)$ nicht überschreiten. Ist daher n eine gerade Zahl, $= 2p$, so hat man $k = 0, 1, 2, \ldots p-1$ zu substituiren; ist aber n eine ungerade Zahl, $= 2p+1$, so hat man $k = 0, 1, 2, \ldots p$ zu substituiren *.

---

* 1. Um die Gleichung $x^3 = -1$ mittelst der Formel

$$x = \cos\frac{(2k+1)H}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k+1)H}{n}$$

aufzulösen, setzen wir $n = 3$, und erhalten

$$x = \cos\frac{(2k+1)\,.\,180^0}{3} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k+1)\,.\,180^0}{3};$$

substituiren ferner in dieser Formel $k = 0, 1$ und finden, den Radius $= 1$ gesetzt,

$$x = \cos\,60^0 \pm \sqrt{-1}\,\sin\,60^0 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1},$$

$$x = \cos 180^0 \pm \sqrt{-1}\,\sin 180^0 = -1,$$

wornach also -1, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$ die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 = -1$ sind. (Vergl. §. 96, Note, 6.)

2. Um die Gleichung $x^4 = -1$ mittelst der Formel

$$x = \cos\frac{(2k+1)H}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k+1)H}{n}$$

aufzulösen, setzen wir $n = 4$ und erhalten

$$x = \cos\frac{(2k+1)\,.\,180^0}{4} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k+1)\,.\,180^0}{4};$$

substituiren ferner in dieser Formel $k = 0, 1, 2$ und finden, den Radius $= 1$ gesetzt,

Im ersten Falle, wo $n = 2p$, hat man die Gleichung

$$x^{2p} = -1$$

aufzulösen, und die Zahlen $k = 0, 1, 2, \ldots p - 1$ geben, in der Formel (β) substituirt, die wachsenden Bögen

$$\frac{H}{2p}, \frac{3H}{2p}, \frac{5H}{2p}, \ldots \frac{(2p-1)H}{2p}$$

ab, welche sämmtlich zwischen 0 und H enthalten sind; die *Sinus* dieser Bögen verschwinden also nicht, und ihre *Cosinus* sind alle von einander verschieden. Jeder dieser Bögen liefert für x zwei imaginäre Werthe, welche durch das Vorzeichen der imaginären Größe $\sqrt{-1}$ von einander verschieden sind und nur einmal vorhanden seyn können. x hat demnach, wie es seyn soll, 2p verschiedene Werthe.

Im zweiten Falle, wo $n = 2p + 1$, hat man die Gleichung

$$x^{2p+1} = -1$$

aufzulösen, und die Zahlenwerthe $k = 0, 1, 2, \ldots p$ geben, in der Formel (β) substituirt, die Bögen

$$\frac{H}{2p+1}, \frac{3H}{2p+1}, \ldots \frac{(2p+1)H}{2p+1} \text{ oder } H.$$

$$x = \cos\ 45^0 \pm \sqrt{-1}\ \sin\ 45^0,$$
$$x = \cos 135^0 \pm \sqrt{-1}\ \sin 135^0,$$
$$x = \cos 225^0 \pm \sqrt{-1}\ \sin 225^0.$$

Da nun bekanntlich

$$\sin\ 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$\sin 135^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$\cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$\sin 225^0 = -\sin 45^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

so wird

$$\cos\ 45^0 \pm \sqrt{-1}\ \sin\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,\sqrt{-1},$$
$$\cos 135^0 \pm \sqrt{-1}\ \sin 135^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,\sqrt{-1},$$
$$\cos 225^0 \pm \sqrt{-1}\ \sin 225^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,\sqrt{-1},$$

Der letzte Bogen, $= H$, verschafft $x = -1$. Durch die übrigen Bögen erhält man für x imaginäre Werthe, welche, wie leicht zu erkennen ist, sämmtlich von einander verschieden sind. x hat demnach, wie es seyn soll, $2p + 1$ verschiedene Werthe.

§. 97.

Kennt man die Wurzeln der Gleichungen $x^n = +1$ und $x^n = -1$, so ist es leicht, die reellen Divisionen vom zweiten Grade der Binome $x^n - 1$ und $x^n + 1$ zu bilden.

Die Formel (α) liefert als Factoren vom ersten Grade des Binoms $x^n - 1$ die zwei Ausdrücke

$$x - \cos\frac{2kH}{n} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2kH}{n},$$

$$x - \cos\frac{2kH}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2kH}{n};$$

multiplicirt man sie mit einander, so erhält man

$$(\alpha')\quad x^2 - 2x\cos\frac{2kH}{n} + 1.$$

Diese Formel enthält alle reelle Divisoren vom zweiten Grade des Binoms $x^n - 1$; um sie daraus zu erhalten, hat man in derselben für k alle ganze Zahlen von 0 bis $\frac{1}{2}n$ zu substituiren.

Auf ähnliche Weise findet man für die reellen Divisoren vom zweiten Grade des Binoms $x^n + 1$ die Formel

$$(\beta')\quad x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)H}{n} + 1,$$

und hat, um sie daraus zu erhalten, in derselben für k alle ganze Zahlen von 0 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ zu substituiren.

Da die Formeln (α) und (β) die reellen Wurzeln der Gleichungen $x^n = 1$ und $x^n = -1$ enthalten, so müssen die beiden

---

wornach also $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2}$ die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 = -1$ sind. (Vergl. §. 96, Note, 6.)

letzten Formeln auch die reellen Factoren vom ersten Grade der Binome $x^n - 1$ und $x^n + 1$ in sich begreifen. Es ist aber zu bemerken, daß sie sich in denselben quadrirt vorfinden. Setzt man z. B. $k = 0$ in der Formel (α'), so erhält man
$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$; man nimmt jedoch nur $x - 1$.

Der Lehrsatz von Côtes.

§. 98.

Legt man k in der Formel (α') alle ganze Zahlenwerthe von 0 bis $n - 1$ bei, und multiplicirt hierauf sämmtliche Trinome, welche durch diese Substitution entstehen, so erhält man offenbar ein Product, in welchem alle Factoren des Binoms $x^n - 1$ quadrirt vorkommen; und es wird also dieses Product gleich $(x^n - 1)^2$ seyn. Substituirt man auf ähnliche Weise für k in der Formel (β') alle ganze Zahlenwerthe $k = 0, 1, 2, \ldots n - 1$, und multiplicirt hierauf sämmtliche daraus entstehende Trinome mit einander, so erhält man das Product $(x^n + 1)^2$.

Dieses vorausgesetzt, theile man die Peripherie in 2n gleiche Theile und bezeichne die Theilungspunkte mit den Numern 0, 1, 2, 3, ꝛc.; ziehe an den Theilungspunkt 0, der als Anfangspunkt gelten mag, einen Radius, und verlängere denselben so weit, als es nöthig werden sollte; auf diesen Radius, rechts oder links vom Theilungspunkte 0, wähle man einen Punkt in irgend einer Entfernung, $= x$, vom Mittelpunkte des Kreises, und ziehe von diesem aus gerade Linien an alle Theilungspunkte der Peripherie.

Man nehme hierauf den Radius des Kreises zur Einheit an, heiße u irgend eine dieser Geraden, und betrachte das Dreieck, welches diese Gerade mit den zwei Geraden bildet, welche ihre Endpunkte mit dem Mittelpunkte des Kreises verbinden. Endigt sich die Gerade u an einem geraden Theilungspunkte, der 2k heißen mag, so wird der zwischen diesem Theilungspunkte und dem Theilungspunkte 0 befindliche Bogen $= \frac{2H}{2n} \times 2k = \frac{2kH}{n}$ seyn, und man erhält leicht in dem gebildeten Dreiecke

$$u^2 = x^2 - 2x \cos \frac{2kH}{n} + 1 \text{*}.$$

---

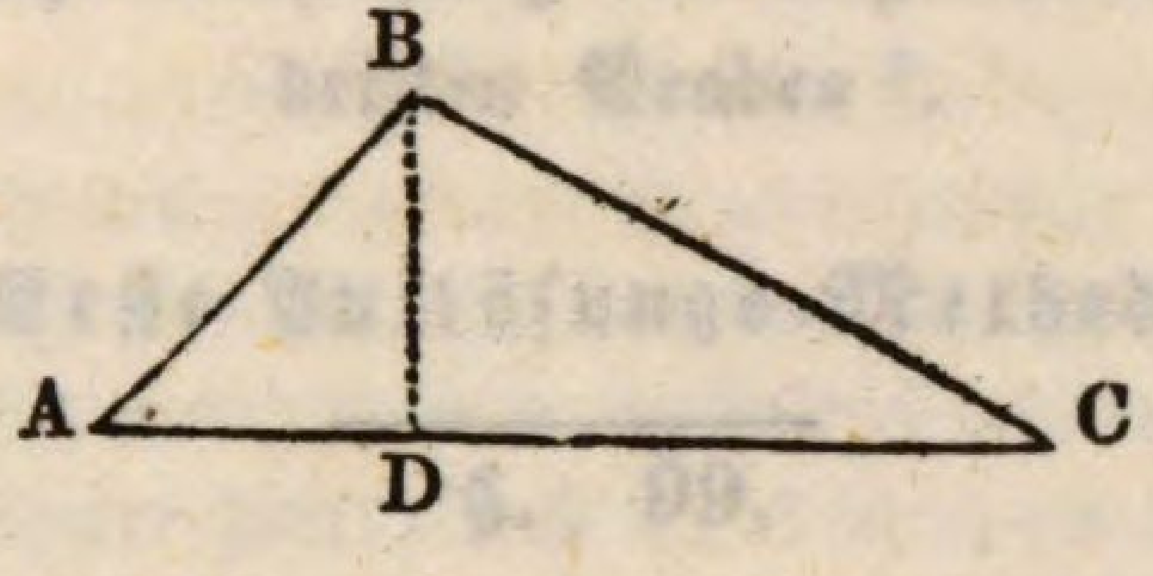
* Es ist nämlich in jedem spitzwinkeligen Dreiecke ABC,

Endigt sich aber die Gerade u an einem geraden Theilungspunkte, der 2k + 1 heißen mag, so erhält man gleichfalls

$$u^2 = x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)H}{n} + 1.$$

Substituirt man in diesen zwei Trinomen für k successive die ganzen Zahlen 0, 1, 2, . . . n — 1, so liefert das erste Trinom die Quadrate der Geraden, welche sich an den geraden Theilungspunkten endigen, und das zweite Trinom die Quadrate der Geraden, welche sich an den ungeraden Theilungspunkten endigen. Da

---



in welchem BD perpendikulär auf CA steht,

$$AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CA \times CD.$$

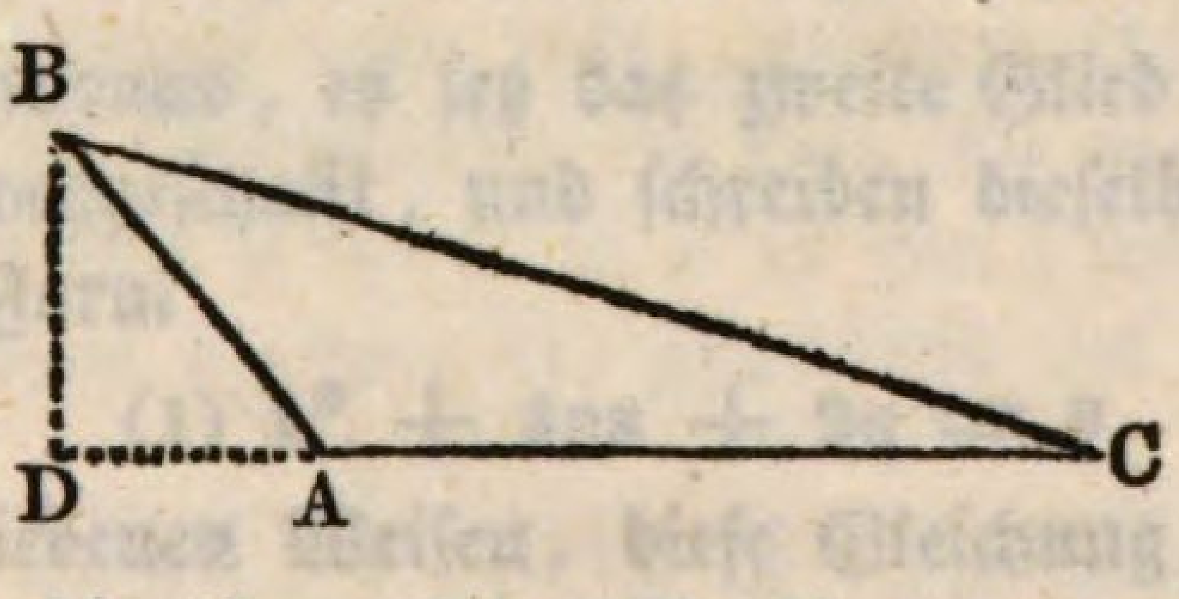
Ferner verhält sich

$$CB : CD = 1 : \cos C,$$

woraus $CD = CB \times \cos C$; also

$$(I)\ AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CA \times CB \times \cos C.$$

Ebenso ist in jedem stumpfwinkligen Dreiecke ABC,



in welchen BD perpendikulär auf der Verlängerung von CA steht,

$$AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CA \times CD.$$

Ferner verhält sich

$$CB : CD = 1 : \cos C,$$

woraus $CD = CB \times \cos C$; also

$$(II)\ AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CA \times CB \times \cos C.$$

Denkt man sich nun (in den zwei vorhergehenden Dreiecken) C als den Mittelpunkt eines Kreises, dessen Halbmesser $CB = 1$, und setzt $CA = x$, $AB = u$, Winkel $C = \frac{2kH}{n}$, so verwandeln sich die Gleichungen (I) und (II) in

$$u^2 = x^2 - 2x \,.\, \cos \frac{2kH}{n} + 1.$$

nun diese zwei Trinome von den Trinomen (α') und (β') nicht differiren, so ergibt sich hieraus und nach dem, was oben bemerkt wurde, folgender von **Côtes** (geboren in England 1682, gestorben 1716) entdeckte Lehrsatz: **Das Product aus allen Geraden, welche sich an den geraden Theilungspunkten der Peripherie endigen, ist gleich der Differenz $x^n - 1$, und das Product aus allen Geraden, welche sich an den ungeraden Theilungspunkten der Peripherie endigen, ist gleich der Summe $x^n + 1$.**

Achte Abhandlung.

Die trigonometrische Auflösung der allgemeinen Gleichungen des dritten Grades *.

Erste Auflösungs-Methode.

§. 99.

Bei der algebraischen Auflösung der cubischen Gleichungen bringt man dieselbe gewöhnlich unter die Form

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

---

* Der Vollständigkeit und des bessern Verständnisses wegen fügen wir hier das Wichtigste über die algebraische Auflösung der cubischen Gleichungen (aus Fourcy's Leçons d'algèbre) bei.

1. Wir setzen voraus, es sey das zweite Glied aus der Gleichung des dritten Grades hinweggeschafft, und schreiben dieselbe, um Brüche zu vermeiden, unter der Form

$$(1)\ x^3 + 3px + 2q = 0.$$

Von den verschiedenen Weisen, diese Gleichung aufzulösen, besteht die einfachste darin, à priori eine Gleichung des dritten Grades ohne zweites Glied zu bilden, welcher eine Wurzel entspricht, die zwar bekannt, aber durch unbestimmte Größen ausgedrückt ist, und sich hierauf dieser Unbestimmten zu bedienen, die letzte Gleichung mit der ersten (1) zu identifiziren. Zur Herstellung dieser Identität wird man zwei Gleichheiten festsetzen und aus diesem Grunde zwei Unbestimmte einführen müssen.

Es sey $x = a + b$, wornach

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b), \text{ und}$$

$$(2)\ x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0,$$

eine Gleichung, welcher die Wurzel $x = a + b$ entspricht, und welche mit der Gleichung (1) identisch gemacht werden muß. Zu diesem Behufe setze man

$$(3)\ ab = -p,\quad a^3 + b^3 = -2q.$$

und findet, daß die Wurzeln dieser Gleichung in folgender Formel enthalten sind:

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Nach der ersten dieser Gleichheiten ist $a^3b^3 = -p^3$. Man kennt also die Summe $a^3 + b^3$ und das Product a^3b^3. Es sind daher die Werthe von a^3 und b^3 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, in welcher der Coefficient des zweiten Gliedes $= +2q$ und das letzte Glied $= -p^3$. Drückt z die Wurzel dieser quadratischen Gleichung aus, so ist

$$z^2 + 2qz - p^3 = 0,$$

welche Gleichung die reducirte Gleichung der Gleichung (1) genannt wird. Ihre beiden Wurzeln geben die Werthe von a^3 und b^3 ab; es ist übrigens gleichgiltig, welche derselben man für den Werth von a^3 ansieht, da der Ausdruck $x = a + b$ keine Aenderung erleidet, wenn man a für b und b für a setzt. Wir nehmen

$$a^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}, \quad b^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3},$$

und erhalten somit

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Von den hier vorkommenden Quadratwurzeln hat jede nur einen Werth, indeß jede der Cubikwurzeln drei verschiedene Werthe hat. Könnte man den Gleichungen (3) genügen, ohne eine Wahl zwischen diesen Werthen zu treffen, so ließen sich auch die Gleichungen (1) und (2) durch dieselben Werthe identifiziren; und da $x = a + b$ eine Wurzel der Gleichung (2) ist, so würde man der Gleichung (1) genügen durch

$$(4) \quad x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Weil aber jede Wurzelgröße des dritten Grades drei verschiedene Werthe hat, so entsprechen dem vorhergehenden Ausdrucke neun verschiedene Werthe, während die Gleichung (1) nur drei verschiedene Wurzeln haben kann. Es muß daher erörtert werden, woher diese vielen Werthe kommen, und welche derselben wirklich Wurzeln der Gleichung (1) abgeben.

Zu diesem Behufe bemerken wir, daß eigentlich nicht die Gleichungen (3) aufgelöst worden sind, um a und b zu erhalten, sondern vielmehr die Gleichungen

$$(5) \quad a^3b^3 = -p^3, \quad a^3 + b^3 = -2q.$$

Bezeichnet man nun die zwei imaginären Cubikwurzeln aus 1 durch α und α^2, von welchen jede das Quadrat der andern ist (siehe §. 96, Note, 8), so kann die Gleichung $a^3b^3 = -p^3$ durch die Erhebung zur

Da jede Wurzelgröße des dritten Grades drei verschiedene Werthe hat, so erhielte man nach dieser Formel neun Werthe für die Unbekannte; bezeichnet man aber die erste Wurzelgröße mit a,

---

dritten Potenz ohne Unterschied aus jedem der folgenden Ausdrücke entstehen:

$$ab = -p, \quad ab = -\alpha p, \quad ab = -\alpha^2 p.$$

Hieraus folgt, daß die neun Werthe, welche die Formel (4) in sich faßt, die Wurzeln folgender drei Gleichungen sind:

$$(6) \quad x^3 + 3px + 2q = 0, \qquad x^3 + 3p\alpha x + 2q = 0,$$
$$x^3 + p\alpha^2 x + 2q = 0.$$

Man kann auch diese neun Werthe als die Wurzeln einer Gleichung des neunten Grades ansehen, welche man erhielte, wenn man die vorhergehenden drei Gleichungen mit einander multipliciren würde. Es wird jedoch einfacher seyn, und läuft auf dasselbe hinaus, irgend eine dieser Gleichungen auf die dritte Potenz zu erheben, nachdem man zuvor das Glied, welches p enthält, auf die andere Seite des Gleichheitszeichens geschafft hat. So erhält man auf der Stelle

$$(x^3 + 2q)^3 = -27p^3x^3.$$

Was die Wurzeln einer jeden der obigen drei Gleichungen insbesondere betrifft, so lassen sie sich nach dem Vorhergehenden leicht ausmitteln: denn bildet p, oder αp, oder $\alpha^2 p$ den Coefficienten von x, so hat man, wie sich von selbst versteht, respective nur zwei solche Werthe von a und b zu addiren, für welche

$$ab = -p, \text{ oder } ab = -\alpha p, \text{ oder } ab = -\alpha^2 p.$$

Nach dieser Regel wird es jetzt leicht seyn, die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

zu finden, deren Auflösung uns allein obliegt. Bezeichnen wir mit A einen Werth der ersten Wurzelgröße des dritten Grades und mit B einen Werth der zweiten Wurzelgröße des dritten Grades, so ergeben sich für a und b folgende Werthe:

$$a = A, \ \alpha A, \ \alpha^2 A,$$
$$b = B, \ \alpha B, \ \alpha^2 B.$$

Nehmen wir ferner A . B = — p an, was erlaubt ist, so darf man nur je zwei solche Werthe addiren, deren Product = A . B ist; es ergeben sich daher, wenn man sich erinnert, daß $\alpha^3 = 1$ ist, für x folgende Werthe:

$$x = A + B,$$
$$x = \alpha A + \alpha^2 B,$$
$$x = \alpha^2 A + \alpha B.$$

Substituirt man endlich für A und B die obigen zwei Cubikwurzeln, für α und α^2 ihre Werthe (siehe §. 96, Note, 8), so erhält man

die zweite mit b, und erinnert sich von der algebraischen Auflösung her, daß stets nur die Summe zweier solcher Werthe von a und

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}},$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

welches die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind; man muß jedoch die darin enthaltenen Cubikwurzeln stets in der beschränkten Bedeutung nehmen, wie A und B, damit sie zu keinen falschen Wurzeln führen.

Die Formel (4), welche dem Vorhergehenden gemäß die drei Wurzeln der Gleichung (1) enthält, wird die Cardanische Formel genannt, weil sie Cardan (geboren 1501 zu Pavia, gestorben 1575 zu Rom) um die Mitte des 16ten Jahrhunderts zuerst bekannt gemacht hat. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß sie entweder von Scipio Ferreo aus Bologna, oder von Tartaglia (geboren zu Anfang des 16ten Jahrhunderts zu Brescia, gestorben 1557 zu Venedig) erfunden worden ist.

2. Für die Discussion dieser Werthe wird es bequemer seyn, A und B anstatt der entsprechenden Cubikwurzeln zu setzen, und die reellen Größen von den imaginären zu sondern. Auf diese Weise erhält man

$$x = A + B,$$

$$x = -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cdot \sqrt{-3},$$

$$x = -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cdot \sqrt{-3}.$$

Wir nehmen ferner an, wie dieß gewöhnlich zu geschehen pflegt, daß die Coefficienten p und q der gegebenen Gleichung reelle Größen seyen. Da nun diese Gleichung von ungeradem Grade ist, so hat sie eine reelle Wurzel, und es ist erlaubt, anzunehmen, A und B seyen die Werthe von a und b, welche diese Wurzel abgeben; so, daß also $A + B$ eine reelle Größe ausdrückt.

Dieß vorausgesetzt, betrachten wir die beiden Wurzelgrößen

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Ist $q^2 + p^3 > 0$, so hat jede einen reellen Werth; man kann also voraussetzen, A und B seyen reell. Diesem gemäß werden aber auch die Ausdrücke $A + B$ und $A - B$ reell; also ist die erste Wurzel $x = A + B$ reell, indeß die beiden andern Wurzeln imaginär sind.

Ist $q^2 + p^3 = 0$, so wird $A = B$, und die drei Wurzeln sind alsdann $x = A$, $x = -A$, $x = -A$, lauter reelle Größen, von welchen die beiden letzten einander gleich sind.

Ist endlich $q^2 + p^3 < 0$, so muß p nothwendigerweise negativ seyn;

b eine Auflösung der Gleichung ausmacht, für welche $ab = -p$, so fallen die unbrauchbaren Werthe von a und b weg, wenn man setzt

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad \text{und } x = a - \frac{p}{a}.$$

---

und es enthalten alsdann a und b, also auch alle drei Werthe von x, imaginäre Größen. Dessen ungeachtet weiß man, daß eine dieser Wurzeln reell ist; und es ist sogar evident, daß die Fälle, in welchen die drei Wurzeln der Gleichung (1) reell und ungleich sind, nur der Hypothese $q^2 + p^3 < 0$ entsprechen können. Man hätte demnach unrecht, anzunehmen, die Werthe von x seyen imaginär. Wir wollen auch in der That sogleich beweisen, daß keine derselben imaginär ist; und da man immer voraussetzen kann, daß A und B solche Ausdrücke sind, deren Summe $A + B$ die reelle Wurzel abgibt, deren Vorhandenseyn nachgewiesen worden ist, so handelt es sich bloß noch darum, zu zeigen, daß der Theil $\frac{1}{2}(A - B)\sqrt{-3}$, welcher in den beiden andern Werthen von x enthalten ist, reell seyn muß.

Durch eine einfache Multiplication erhält man

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3,$$

und hieraus

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2} = \frac{A^3 - B^3}{(A + B)^2 - AB}.$$

Es ist aber, wegen der Werthe von a^3 und b^3, $A^3 - B^3 = 2\sqrt{q^2 + p^3}$; ferner nach dem, was oben über die Wahl von A und B gesagt worden ist, $A \cdot B = -p$. Setzt man daher $A + B = x'$, so wird

$$A - B = \frac{2\sqrt{q^2 + p^3}}{x'^2 + p},$$

$$\frac{A - B}{2} \cdot \sqrt{-3} = \frac{\sqrt{-3(q^2 + p^3)}}{x'^2 + p}.$$

Da nun der Annahme gemäß $q^2 + p^3 < 0$, so ist der vorhergehende Ausdruck reell; also hat auch x drei reelle Werthe.

Hiedurch ist nachgewiesen, daß bei der Hypothese $q^2 + p^3 < 0$ die in den Werthen von x enthaltenen imaginären Größen sich gegen einander aufheben müssen; die Algebra kann jedoch diese Reduction nicht bewerkstelligen, es sey denn mittelst der unendlichen Reihen. Gehört eine Gleichung diesem Falle an, so lassen sich die Zahlenwerthe ihrer Wurzeln nicht nach den oben gefundenen allgemeinen Ausdrücken berechnen; sie können aber alsdann nach andern algebraischen Methoden, welche für die Auflösung der höheren Zahlengleichungen von jedem Grade bestimmt sind, oder auch sehr einfach nach trigonometrischen Formeln gefunden werden.

§. 100.

Ist der Radicand $q^2 + p^3$ negativ, so sind die Werthe von x aus imaginären Größen zusammengesetzt; da man nun bei der algebraischen Auflösung beweist, daß dessen ungeachtet in diesem Falle, wo also $q^2 + p^3 < 0$, die Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, so scheint es, der Calcul müsse auch die Mittel reichen, die imaginären Größen gegen einander aufzuheben. Dieß verhält sich jedoch nicht so, es sey denn, daß man seine Zuflucht zu den

---

3. Kennt man eine reelle Wurzel x', so ist es überdieß leicht, die beiden andern Wurzeln zu erhalten. Dieß erhellt einmal aus dem obigen Werthe von A — B; denn nach demselben ist offenbar

$$x = x', \quad x = -\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p},$$

$$x = -\frac{x'}{2} - \frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p}.$$

Ferner erhellt dieß, wenn die gegebene Gleichung durch $x - x'$ dividirt wird. Um diese Division bequemer bewerkstelligen zu können, bemerke man, daß $x'^3 + 3px' + 2q = 0$ seyn muß, wodurch die gegebene Gleichung folgende Form annimmt:

$$x^3 - x'^3 + 3p(x - x') = 0.$$

Dividirt man hierauf diese Gleichung durch $x - x'$, so erhält man

$$x^2 + xx' + x'^2 + 3p = 0,$$

woraus $x = -\frac{1}{2}x' \pm \sqrt{-3\left(\frac{1}{4}x'^2 + p\right)}$.

Die Uebereinstimmung dieser Werthe von x mit den vorhergehenden läßt sich folgendermaßen nachweisen. Es ist

$$\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}x'^2+p\right)} = \frac{\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}x'^2+p\right)\left(x'^2+p\right)^2}}{x'^2+p}$$

$$= \frac{\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}x'^6+\frac{6}{4}px'^4+\frac{9}{4}p^2x'^2+p^3\right)}}{x'^2+p},$$

ferner verschafft die Relation $x'^3 + 3px' + 2q = 0$

$$q^2 = \left(\frac{1}{2}x'^3 + \frac{3}{2}px'\right)^2 = \frac{1}{4}x'^6 + \frac{6}{4}px'^4 + \frac{9}{4}p^2x'^2;$$

also $\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}x'^2+p\right)} = \frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p}$.

unendlichen Reihen nehme; diese Schwierigkeit hat den Analytikern viel zu schaffen gemacht, und dem vorliegenden Falle den Namen des **irreductibeln Falles** verschafft.

Die Schwierigkeit rührt daher, daß sich die beiden Cubikwurzeln, welche der allgemeine Werth von x enthält, im Allgemeinen nicht so ausziehen lassen, daß im Resultate der reelle Theil vom imaginären Theile getrennt vorkommt. Da sich nun diese Trennung bei den Ausdrücken von der Form $\sqrt[n]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi}$ nach der Moivre'schen Formel leicht bewerkstelligen läßt, so werden wir die beiden Cubikwurzeln auf diese Form zurückführen.

Da $q^2 + p^3 < 0$, so muß p negativ seyn. Wir substituiren daher $-p$ anstatt $+p$, und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$(1)\quad x^3 - 3px + 2q = 0.$$

Ferner erhalten wir alsdann

$$q^2 - p^3 < 0 \text{ oder } q^2 < p^3,$$

die Werthe von a durch die Formel

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 - p^3}}$$

und die von x durch die Formel

$$x = a + \frac{p}{a} = \sqrt{p}\left(\frac{a}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{a}\right),$$

in welcher die verschiedenen Werthe von a zu substituiren sind.

Dieß vorausgesetzt, der allgemeine Ausdruck von a gibt

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{1 - \frac{q^2}{p^3}}\,\sqrt{-1}};\,*$$

und da $q^2 < p^3$, so kann man einen Bogen φ mittelst der Gleichung

---

* Es ist nämlich $\frac{a}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 - p^3}}}{\sqrt{p}}$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{\frac{q^2}{p^3} - 1}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{p^3}\right)}\cdot\sqrt{-1}}.$$

$$\cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}$$

bestimmen *.

Da aber die Anzahl der Bögen, welche einem gegebenen *Cosinus* angehören, unendlich groß ist, so wählen wir den Bogen, der $< 180^0$ ist.

Wir erhalten nach der Moivre'schen Formel

$$(2)\quad \left(\cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}\varphi\right)^3 = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

und hieraus

$$\sqrt[3]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi} = \cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}\varphi;$$

nach diesem ist ferner

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi} = \cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}\varphi,$$

$$\frac{\sqrt{p}}{a} = \frac{1}{\cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}\varphi} = \cos\frac{1}{3}\varphi - \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}\varphi\ {}^{**},$$

$$\frac{a}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{a} = 2\cos\frac{1}{3}\varphi.$$

Bedenken wir nun, daß sich das zweite Glied der Formel (2) nicht ändert, wenn man in dieser Formel zu φ beliebig viele

---

* Aus $\frac{-q}{\sqrt{p^3}} = \cos\varphi$ folgt sodann

$$\frac{q^2}{p^3} = \cos^2\varphi,$$

$$\sqrt{1 - \frac{q^2}{p^3}} = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sin\varphi,$$

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{p^3}\right)}\cdot\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}.$$

** Nach $\frac{a}{\sqrt{p}} = \frac{\cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}\varphi}{1}$ ist nämlich

$$\frac{\sqrt{p}}{a} = \frac{1}{\cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}\varphi}$$

Peripherien addirt, so folgt hieraus, wenn man 180^0 mit H und jede beliebige ganze Zahl mit k bezeichnet, daß man für x alle Werthe nehmen kann, welche in folgender Formel enthalten sind:

$$x = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}(\varphi + 2kH).$$

Man darf jedoch nicht glauben, auf diese Weise mehr als drei Werthe für x zu erhalten; denn, welche Werthe man auch für k substituiren mag, immer ergeben sich wiederholt die Resultate, welche man für k = 0, 1, 2 erhält, nämlich:

$$x = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}\varphi,$$

$$x = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}(\varphi + 2H),$$

$$x = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}(\varphi + 4H)\ *.$$

$$-\left(cos\ \frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\ sin\ \frac{1}{3}\varphi\right)^{-1} = cos - \frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\ sin - \frac{1}{3}\varphi$$

$= cos\ \frac{1}{3}\varphi - \sqrt{-1}\ sin\ \frac{1}{3}\varphi$; da $cos - \frac{1}{3}\varphi = cos\ \frac{1}{3}\varphi$,

$$sin - \frac{1}{3}\varphi = -\ sin\ \frac{1}{3}\varphi.$$

* So erhält man für k = 3:

$$x = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}(\varphi + 6H) = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}\varphi,$$

weil $cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{6}{3}H\right) = cos\ \frac{1}{3}\varphi$;

für k = 4:

$$x = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}(\varphi + 8H) = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}(\varphi + 2H),$$

weil $cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{8}{3}H\right) = cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{2}{3}H\right)$;

für k = 5:

$$x = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}(\varphi + 10H) = 2\sqrt{p}\ cos\ \frac{1}{3}(\varphi + 4H),$$

weil $cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{10}{3}H\right) = cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{4}{3}H\right)$;

rc.

§. 101.

Es ist vornämlich der irreductibele Fall, bei welchem man seine Zuflucht zu den trigonometrischen Linien nimmt; man kann jedoch auch in den anderen Fällen von denselben Gebrauch machen. Fahren wir fort, p als negativ anzusehen, und betrachten diesem gemäß wieder die Gleichung

$$(3)\quad x^3 - 3px + 2q = 0,$$

setzen aber $q^2 > p^3$. Die Transformationen des vorhergehenden Paragraphen sind alsdann unmöglich, denn *cos* φ würde, abgesehen von seinem Vorzeichen, > 1. Dieser Fall läßt sich auf folgende Weise behandeln.

Man hat noch

$$x = \sqrt{p}\left(\frac{a}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{a}\right).$$

Bringen wir nun $\frac{a}{\sqrt{p}}$ unter die Form

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{\frac{q^2}{p^3} - 1}},$$

und bestimmen den Bogen φ durch die Gleichung

$$\sin 2\varphi = -\frac{\sqrt{p^3}}{q},$$

so erhalten wir

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\sin 2\varphi} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2\varphi} - 1}} = \sqrt[3]{\frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,*.$$

---

* Aus $\quad -\frac{\sqrt{p^3}}{q} = \frac{\sin 2\varphi}{1}$ folgt nämlich

$$-\frac{q}{\sqrt{p^3}} = \frac{1}{\sin 2\varphi},$$

$$\frac{q^2}{p^3} = \frac{1}{\sin^2 2\varphi},$$

$$\sqrt{\frac{q^2}{p^3} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2\varphi} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}}{\sin 2\varphi} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{\frac{q^2}{p^3} - 1}} = \sqrt[3]{\frac{1 + \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}}.$$

Beim Wurzelausziehen kann man hier nach Belieben $-\cos 2\varphi$, oder $+\cos 2\varphi$ nehmen, wie wir sogleich zeigen werden.

Setzt man $2\sin^2\varphi$ anstatt $1-\cos 2\varphi$, $2\sin\varphi\cos\varphi$ anstatt $\sin 2\varphi$ (siehe unten die Note, VI und III), und bringt alles unter gleiche Benennung, so erhält man

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\frac{2\sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}} = \sqrt[3]{\tang\varphi}.$$

Wir setzen ferner

$$\tang\psi = \sqrt[3]{\tang\varphi},$$

und berechnen den Bogen ψ nach dieser Formel. Bezeichnet man die zwei imaginären Cubikwurzeln aus 1 mit Θ und Θ^2, von welchen jede das Quadrat der andern ist (siehe §. 96, Note, 8), so erhält man folgende Werthe von $\frac{a}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \tang\psi,\quad \frac{a}{\sqrt{p}} = \Theta\tang\psi,\quad \frac{a}{\sqrt{p}} = \Theta^2\tang\psi.$$

Substituirt man diese Werthe in x, und bemerkt, daß sowohl $\tang\psi\cotg\psi = 1$, als auch $\Theta^3 = 1$, so wird

$$x = \sqrt{p}\,(\tang\psi + \cotg\psi),$$
$$x = \sqrt{p}\,(\Theta\tang\psi + \Theta^2\cotg\psi),$$
$$x = \sqrt{p}\,(\Theta^2\tang\psi + \Theta\cotg\psi).$$

Hätte man $+\cos 2\varphi$ anstatt $-\cos 2\varphi$ in den Calcul eingeführt, so wäre die $\cotg\psi$ an die Stelle der $\tang\psi$ getreten, und vice versa, was jedoch keinen neuen Werth für x hervorgebracht hätte.

Ersetzen wir nun Θ und Θ^2 durch ihre Werthe, trennen in jedem Werthe von x den reellen Theil vom imaginären Theile, und bemerken, daß $\Theta = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$,

$$\Theta^2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}),\ \text{ferner}$$

$$\cotg\psi + \tang\psi = 2\operatorname{cosec} 2\psi\ \text{und}$$
$$\cotg\psi - \tang\psi = 2\cotg 2\psi\ ^*,$$

---

* Setzt man in den bekannten goniometrischen Formeln

so erhalten wir nach einigen Reductionen

$$x = 2\sqrt{p}\,cosec\,2\psi,$$
$$x = -\sqrt{p}\,(cosec\,2\psi + \sqrt{-3}\,cotg\,2\psi),$$
$$x = -\sqrt{p}\,(cosec\,2\psi - \sqrt{-3}\,cotg\,2\psi)\ *.$$

I. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$

II. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\beta = \alpha$: so erhält man

III. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$

IV. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, und hiernach

$1 + \cos 2\alpha = 1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 + \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

oder V. $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;$

$1 - \cos 2\alpha = 1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 - (1 - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha,$

oder VI. $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$

Ferner findet man

$$cotg\,\alpha + tang\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} \text{ (nach III.) } = 2\,.\,\frac{1}{\sin 2\alpha},$$

oder VII. $cotg\,\alpha + tang\,\alpha = 2\,cosec\,2\alpha;$

$$cotg\,\alpha - tang\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \text{ (nach V.)}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} \text{ (nach III.) } = 2\,.\,\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha},$$

oder VIII. $cotg\,\alpha - tang\,\alpha = 2\,cotg\,2\alpha.$

* Man erhält nämlich

$$x = \sqrt{p}\,(\Theta\,tang\,\psi + \Theta^2\,cotg\,\psi)$$
$$= \sqrt{p}\left[\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})\,tang\,\psi + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})\,cotg\,\psi\right]$$
$$= -\sqrt{p}\left[\frac{1}{2}(cotg\,\psi + tang\,\psi) + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\,(cotg\,\psi - tang\,\psi)\right]$$
$$= -\sqrt{p}\,(cosec\,2\psi + \sqrt{-3}\,cotg\,2\psi);\text{ ferner}$$

$$x = \sqrt{p}\,(\Theta^2\,tang\,\psi + \Theta\,cotg\,\psi)$$
$$= \sqrt{p}\left[\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})\,tang\,\psi + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})\,cotg\,\psi\right]$$
$$= -\sqrt{p}\left[\frac{1}{2}(cotg\,\psi + tang\,\psi) - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\,(cotg\,\psi - tang\,\psi)\right]$$
$$= -\sqrt{p}\,(cosec\,2\psi - \sqrt{-3}\,cotg\,2\psi).$$

§. 102.

Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem p positiv ist. Es sey die Gleichung des dritten Grades

$$(4)\quad x^3 + 3px + 2q = 0.$$

Hier hat man, wegen $ab = -p$,

$$x = a - \frac{p}{a} = \sqrt{p}\left(\frac{a}{\sqrt{p}} - \frac{\sqrt{p}}{a}\right),$$

und überdieß

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\frac{-q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{\frac{q^2}{p^3} + 1}}.$$

Da die Tangente und Cotangente alle Grade der Größe durchlaufen können, und der Ausdruck $\frac{-q}{\sqrt{p^3}}$ jeden beliebigen Werth haben kann, so ersetzen wir diesen durch eine jener Linien. Es sey

$$cotg\ 2\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}:$$

so wird

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{cotg\ 2\varphi + \sqrt{cotg^2\ 2\varphi + 1}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1 + cos\ 2\varphi}{sin\ 2\varphi}} = \sqrt[3]{\frac{2 cos^2 \varphi}{2\ sin\ \varphi\ cos\ \varphi}} = \sqrt[3]{cotg\ \varphi}\ ^*.$$

Es sey ferner

$$cotg\ \psi = \sqrt[3]{cotg\ \varphi}:$$

so wird

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = cotg\ \psi, \quad \frac{a}{\sqrt{p}} = \Theta\ cotg\ \psi, \quad \frac{a}{\sqrt{p}} = \Theta^2 cotg\ \psi,$$

---

* Es ist nämlich $\sqrt{cotg^2\ 2\varphi + 1} = cosec\ 2\varphi$,

$$\sqrt[3]{cotg\ 2\varphi + cosec\ 2\varphi} = \sqrt[3]{\frac{cos\ 2\varphi}{sin\ 2\varphi} + \frac{1}{sin\ 2\varphi}} = \sqrt[3]{\frac{1 + cos\ 2\varphi}{sin\ 2\varphi}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2\ cos^2\ \varphi}{2\ sin\ \varphi\ cos\ \varphi}}$$ (siehe §. 101, Note, V. und III.).

und die Winkel φ und ψ sind leicht aus den Tafeln zu entnehmen; diesem gemäß erhält man endlich nach einigen Reductionen

$$x = 2\sqrt{p}\; cotg\, 2\psi,$$
$$x = -\sqrt{p}\,(cotg\, 2\psi - \sqrt{-3}\; cosec\, 2\psi),$$
$$x = -\sqrt{p}\,(cotg\, 2\psi + \sqrt{-3}\; cosec\, 2\psi)\ *.$$

Zweite Auflösungs-Methode.

§. 103.

Wenn man eine trigonometrische Linie kennt, welche irgend einem Bogen entspricht, und sucht hiernach eine trigonometrische Linie zu bestimmen, welche einem Bogen entspricht, der die Hälfte, oder den dritten Theil, 2c. des ersten Bogens ausmacht, so gelangt man zu einer Gleichung, welche, indem sie mit gewissen andern gegebenen Gleichungen in Relation gesetzt wird, dazu dienen kann, die Wurzeln der letzten Gleichungen auf directem Wege zu finden. Wir wollen dieß an den Gleichungen des dritten Grades zeigen.

Betrachten wir die Gleichung

$$(1)\quad x^3 + 3px + 2q = 0.$$

Es sey $cos\,\varphi$ gegeben, wo φ irgend einen Bogen bezeichnen soll. Setzt man hierauf $cos\,\frac{1}{3}\varphi = z$ und sucht hiernach z zu

---

* Man erhält nämlich auf dieselbe Weise, wie §. 101 bei der analogen Umformung,

1) $x = \sqrt{p}\,(cotg\,\psi - tang\,\psi) = 2\sqrt{p}\; cotg\, 2\psi,$

2) $x = \sqrt{p}\,(\Theta\, cotg\,\psi - \Theta^2\, tang\,\psi)$

$$= \sqrt{p}\left[\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})\; cotg\,\psi - \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})\; tang\,\psi\right]$$
$$= -\sqrt{p}\left[\frac{1}{2}(cotg\,\psi - tang\,\psi) - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\;(cotg\,\psi + tang\,\psi)\right]$$
$$= -\sqrt{p}\,(cotg\, 2\psi - \sqrt{-3}\; cosec\, 2\psi),$$

3) $x = \sqrt{p}\,(\Theta^2\, cotg\,\psi - \Theta\, tang\,\psi)$

$$= \sqrt{p}\left[\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})\; cotg\,\psi - \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})\; tang\,\psi\right]$$
$$= -\sqrt{p}\left[\frac{1}{2}(cotg\,\psi - tang\,\psi) + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\;(cotg\,\psi + tang\,\psi)\right]$$
$$= -\sqrt{p}\,(cotg\, 2\psi + \sqrt{-3}\; cosec\, 2\psi).$$

bestimmen, so gelangt man zu der Gleichung

$$(2)\ z^3 - \frac{3}{4} z - \frac{1}{4} \cos \varphi = 0\ *.$$

Nimmt man nun an, φ sey ein positiver Bogen $<$ H, und entspreche dem gegebenen *Cosinus*, so ist leicht nachzuweisen, daß folgende Wurzeln der Gleichung (2) entsprechen:

$$(3)\ z = \cos \frac{1}{3} \varphi,\quad z = \cos \frac{1}{3}(2H + \varphi),$$

$$z = \cos \frac{1}{3}(2H - \varphi)\ **.$$

---

* Es ist bekanntlich

I. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$,

II. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Wird in diesen Formeln $\beta = \alpha$ gesetzt, so erhält man

III. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

IV. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Setzt man ferner in II. $\beta = 2\alpha$, so erhält man

$\cos 3\alpha = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha$,

eine Formel, welche durch die Substitution der Werthe von $\sin 2\alpha$ aus III., $\cos 2\alpha$ aus IV. und mittelst der Relation $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ in folgende übergeht:

V. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$. (Siehe §. 92, Note 1. eine andere Ableitung dieser Formel.)

Nach dieser Formel ist endlich

VI. $\cos \alpha = 4 \cos^3 \frac{1}{3} \alpha - 3 \cos \frac{1}{3} \alpha$, und hiernach

$$\cos^3 \frac{1}{3} \alpha - \frac{3}{4} \cos \frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha = 0.$$

Nimmt man nun in dieser Gleichung $\cos \alpha = \cos \varphi$ als bekannt an, und soll $\cos \frac{1}{3} \alpha = \cos \frac{1}{3} \varphi = z$ gesucht werden, so hat man folgende Gleichung aufzulösen:

$$z^3 - \frac{3}{4} z - \frac{1}{4} \cos \varphi = 0.$$

** Es ist leicht einzusehen, daß einer und derselben trigonometrischen Linie unendlich viele verschiedene Bögen entsprechen. Betrachten wir z. B. $\cos x = a$, wo a positiv seyn soll, setzen $180^0 = H$ und den zu $\cos x$ unmittelbar gehörigen positiven Bogen $= \varphi$, so erkennt man sogleich, daß folgende zwei Reihen Bögen dem $\cos x$ entsprechen:

Will man die Identität der Gleichungen (1) und (2) herstellen, so hat man zwei Bedingungen festzusetzen: hiefür aber müßte die Gleichung (2) zwei Unbestimmte enthalten, indeß sie die einzige Unbestimmte φ enthält. Wir führen daher in dieselbe eine neue Unbestimmte ϱ ein, indem wir $x = \varrho z$ setzen, woraus $z = \frac{x}{\varrho}$. Durch diese Transformation verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$(4) \quad x^3 - \frac{3}{4}\varrho^2 - \frac{1}{4}\varrho^3 \cos\varphi = 0;$$

würde man sofort die Werthe in (3) mit ϱ multipliciren, so erhielte man die drei Wurzeln der letzten Gleichung.

Um die Gleichung (4) mit der Gleichung (1) zu identifiziren, setzen wir

---

φ, $2H+\varphi$, $4H+\varphi$, 2c., $2H-\varphi$, $4H-\varphi$, $6H-\varphi$, 2c.
$-\varphi$, $-2H-\varphi$, $-4H-\varphi$, 2c., $-2H+\varphi$, $-4H+\varphi$, $-6H+\varphi$, 2c.

Drückt k irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl aus, so sind demnach alle Bögen, welche dem $\cos x$ entsprechen, in folgender allgemeinen Formel enthalten:

$$x = 2kH \pm \varphi.$$

Um daher die Wurzeln der Gleichung

$$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}\cos\varphi = 0$$

zu finden, bemerken wir, daß sie dem Vorhergehenden gemäß sämmtlich in der allgemeinen Formel

$$z = \cos\frac{2kH \pm \varphi}{3}$$

enthalten seyn müssen. Bezeichnet nun n eine beliebige ganze Zahl, so kann k offenbar nur $= 3n$, $= 3n + 1$, oder $= 3n - 1$ seyn, und wir erhalten durch die Substitution dieser Werthe und Hinweglassung der überflüssigen Peripherien

$$1)\ z = \cos\frac{3n\ .\ 2H \pm \varphi}{3} = \cos\left(2nH \pm \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\left(\pm\frac{\varphi}{3}\right) = \cos\frac{\varphi}{3},$$

$$2)\ z = \cos\frac{(3n+1)\ .\ 2H \pm \varphi}{3} = \cos\left(2nH + \frac{2H}{3} \pm \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2H}{3} \pm \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$3)\ z = \cos\frac{(3n-1)\ .\ 2H \pm \varphi}{3} = \cos\left(-\frac{2H}{3} \pm \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2H}{3} \mp \frac{\varphi}{3}\right);$$

also hat z im Ganzen folgende drei von einander verschiedene Werthe:

$$z = \cos\frac{1}{3}\varphi,\quad z = \cos\frac{1}{3}(2H + \varphi),\quad z = \cos\frac{1}{3}(2H - \varphi).$$

$$-\frac{3}{4}\varrho^2 = 3p, \quad -\frac{1}{4}\varrho^3 \cos\varphi = 2q,$$

$$\text{woraus } \varrho = 2\sqrt{-p}, \quad \cos\varphi = \frac{q}{p\sqrt{-p}}.$$

Damit nun φ reell sey, muß zuvor $\cos\varphi$ reell seyn, was wieder verlangt, daß p in der Gleichung (1) negativ sey. Wir sehen daher in dieser Gleichung $-$ p anstatt $+$ p, wodurch sie folgende Form annimmt:

$$(5) \quad x^3 - 3px + 2q = 0;$$

und die Werthe von ϱ und $\cos\varphi$ sich verwandeln in

$$\varrho = 2\sqrt{p}, \quad \cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}.$$

Damit φ reell sey, muß ferner $\cos\varphi$, abgesehen von seinem Vorzeichen, < 1, also $q^2 < p^3$ oder $q^2 - p^3 < 0$ seyn. Man kann hierauf φ mittelst der Tafeln berechnen, und die Werthe in (3) mit ϱ oder $2\sqrt{p}$ multipliciren, wodurch man die Wurzeln der Gleichung (5) erhält, nämlich:

$$x = 2\sqrt{p} \cos\frac{1}{3}\varphi,$$

$$x = 2\sqrt{p} \cos\frac{1}{3}(2H + \varphi),$$

$$x = 2\sqrt{p} \cos\frac{1}{3}(2H - \varphi),$$

Werthe, welche leicht mittelst der Tafeln berechnet werden können. Die §. 100 für x gefundenen Werthe lassen sich sehr einfach auf die so eben gefundenen zurückführen *.

---

* §. 100 fand man für die Wurzeln der Gleichung (5)

$$x = 2\sqrt{p} \cos\frac{1}{3}\varphi,$$

$$x = 2\sqrt{p} \cos\frac{1}{3}(\varphi + 2H),$$

$$x = 2\sqrt{p} \cos\frac{1}{3}(\varphi + 4H),$$

und darf somit nur $\cos\frac{1}{3}(\varphi + 4H)$ auf $\cos\frac{1}{3}(2H - \varphi)$ zurückführen, was sich bewerkstelligen läßt, wie folgt:

Es wurde stillschweigend $\varrho = + 2\sqrt{p}$ angenommen; ϱ kann aber auch $= - 2\sqrt{p}$ gesetzt werden. Hiedurch erhielte man $\cos\varphi = \frac{q}{\sqrt{p^3}}$ anstatt $\cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}$; und müßte also in den vorhergehenden Werthen $-\sqrt{p}$ anstatt $+\sqrt{p}$, $H - \varphi$ anstatt φ substituiren. Da jedoch eine Gleichung des dritten Grades nicht mehr als drei Wurzeln hat, so fände man auf diesem Wege keine neuen Werthe für x, wovon man sich überdieß durch die wirkliche Ausführung leicht überzeugen kann *.

Nimmt man p negativ und $q^2 < p^3$ an, so entspricht die Gleichung (1) dem irreductibeln Falle, der somit im Vorhergehenden seine zweite Auflösung gefunden hat.

§. 104.

Wir fahren fort, p negativ anzunehmen, setzen aber $q^2 - p^3 > 0$, wo das Zeichen $>$ die Gleichheit nicht ausschließen soll.

Bei dieser Hypothese sind die weiter oben für x gefundenen Werthe nur darum imaginär, weil die Bedingung, welche φ bestimmt, verlangt, daß $\cos\varphi > 1$; es ist daher natürlich, für x einen Werth zu suchen, der $> 2\sqrt{p}$, und wir setzen daher $x = 2\sqrt{p}\,\operatorname{cosec}\psi$, oder zur Vermeidung der Brüche,

---

$$\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4H}{3}\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4H}{3} - \frac{6H}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2H}{3}\right) = \cos - \left(\frac{2H}{3} - \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\frac{1}{3}(2H - \varphi).$$

* Substituirt man $H - \varphi$ anstatt φ, $-2\sqrt{p}$ anstatt $2\sqrt{p}$, so verwandelt sich

1) $2\sqrt{p}\cos\frac{1}{3}\varphi$ in $-2\sqrt{p}\cos\frac{1}{3}(H - \varphi) = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{H-\varphi}{3}\right)$

$$= 2\sqrt{p}\cos\left(H - \frac{H-\varphi}{3}\right) = 2\sqrt{p}\cos\frac{1}{3}(2H + \varphi),$$

2) $2\sqrt{p}\cos\frac{1}{3}(2H+\varphi)$ in $-2\sqrt{p}\cos\frac{1}{3}(2H+H-\varphi) = -2\sqrt{p}\cos\left(H - \frac{\varphi}{3}\right)$

$$= 2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3},$$

3) $2\sqrt{p}\cos\frac{1}{3}(2H-\varphi)$ in $-2\sqrt{p}\cos\frac{1}{3}(2H-H+\varphi) = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{H+\varphi}{3}\right)$

$$= 2\sqrt{p}\cos\left(H - \frac{H+\varphi}{3}\right) = 2\sqrt{p}\cos\frac{1}{3}(2H - \varphi).$$

$x = 2\sqrt{p}\ cosec\ 2\psi$. Diesem gemäß muß man sofort à priori eine Gleichung des dritten Grades bilden, welche eine reelle Wurzel von dieser Form hat, deren zwei andere Wurzeln imaginär sind, und welche sich leicht mittelst der Tafeln auflösen läßt.

Ohne den Factor der $cosec\ 2\psi$ näher zu bestimmen, setzen wir $x = 2\rho\ cosec\ 2\psi$, wo also ρ und ψ zwei Unbestimmte bezeichnen sollen. Bemerkt man nun, daß

$$2\ cosec\ 2\psi = \frac{2}{sin\ 2\psi} = \frac{sin^2\psi + cos^2\psi}{sin\ \psi\ cos\ \psi}$$
$$= tang\ \psi + cotg\ \psi,$$

so wird

$$x = \rho\ (tang\ \psi + cotg\ \psi),$$
$$x^3 = \rho^3\ (tang^3\psi + cotg^3\psi) + 3\rho^3\ (tang\ \psi + cotg\ \psi),$$

oder indem man x für $\rho\,(tang\ \psi + cotg\ \psi)$ substituirt und die Gleichung annullirt,

$$(6)\quad x^3 - 3\rho^2 x - \rho^3\ (tang^3\psi + cotg^3\psi) = 0.$$

Bezeichnet man die zwei imaginären Cubikwurzeln von 1 mit Θ und Θ^2, so sieht man leicht, daß jeder der folgenden Werthe von x der Gleichung (6) genügt:

$$x = \rho\ (tang\ \psi + cotg\ \psi),$$
$$x = \rho\ (\Theta\ tang\ \psi + \Theta^2\ cotg\ \psi),$$
$$x = \rho\ (\Theta^2\ tang\ \psi + \Theta\ cotg\ \psi),$$

wornach also diese drei Werthe von x die Wurzeln der Gleichung (6) ausmachen *.

Wir setzen hierauf, um die Identität der Gleichungen (5) und (6) herzustellen,

---

* Es folgt nämlich aus

$$x = \rho\ (\Theta\ tang\ \psi + \Theta^2\ cotg\ \psi)$$
$$x^3 = \rho^3\ (tang^3\psi + cotg^3\psi) + 3\rho^3\ (\Theta\ tang\ \psi + \Theta^2\ cotg\ \psi),$$

woraus gleichfalls

$$x^3 - 3\rho^3 x - \rho^3\ (tang^3\psi + cotg^3\psi) = 0;$$

ferner aus

$$x = \rho\ (\Theta^2\ tang\ \psi + \Theta\ cotg\ \psi)$$
$$x^3 = \rho^3 (tang^3\psi + cotg^3\psi) + 3\rho^3\ (\Theta^2\ tang\ \psi + \Theta\ tang\ \psi),$$

woraus gleichfalls

$$x^3 - 3\rho^3 x - \rho^3\ (tang^3\psi + cotg^3\psi) = 0.$$

$$\varrho = \sqrt{p}, \quad tang^3 \psi + cotg^3 \psi = -\frac{2q}{\sqrt{p^3}};$$

ferner, um ψ zu berechnen,

$$tang\, \psi = \sqrt[3]{tang\, \varphi}:$$

wornach $tang\, \varphi = tang^3 \psi$, $cotg\, \varphi = cotg^3 \psi$,

$$tang\, \varphi + cotg\, \varphi = -\frac{2q}{\sqrt{p^3}}, \quad \frac{sin\, \varphi}{cos\, \varphi} + \frac{cos\, \varphi}{sin\, \varphi} = -\frac{2q}{\sqrt{p^3}},$$

$$\frac{sin^2 \varphi + cos^2 \varphi}{sin\, \varphi\, cos\, \varphi} = -\frac{2q}{\sqrt{p^3}}, \quad sin\, 2\varphi = -\frac{\sqrt{p^3}}{q}.$$

Die Tafeln verschaffen sodann φ, nach φ ergibt sich ψ, und hiernach endlich findet man die Werthe von x. Ersetzt man ϱ, Θ und Θ^2 durch ihre Werthe, so erhält man nach einigen Reductionen, wie in §. 101,

$$x = \sqrt{p}\, cosec\, 2\psi,$$
$$x = -\sqrt{p}\,(cosec\, 2\psi + \sqrt{-3}\, cotg\, 2\psi),$$
$$x = -\sqrt{p}\,(cosec\, 2\psi - \sqrt{-3}\, cotg\, 2\psi).$$

§. 105.

Diese Formeln entsprechen bloß den Fällen der Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$, in welchen p negativ ist und $q^2 > p^3$: denn in jedem andern Falle würde $sin\, 2\varphi$ entweder imaginär oder > 1. Ist daher p positiv, so muß man einen andern Weg einschlagen.

Wir setzen alsdann $x = 2\varrho\, cotg\, 2\psi$, erhalten

$$x = 2\varrho \left(\frac{cos^2 \psi - sin^2 \psi}{2\, sin\, \psi\, cos\, \psi}\right) = \varrho\,(cotg\, \psi - tang\, \psi),$$

und es führt das Erheben zur dritten Potenz auf dieselbe Weise, wie weiter oben, zur Gleichung

$$(7)\quad x^3 + 3\varrho^2 x - \varrho^3\,(cotg^3 \psi - tang^3 \psi) = 0,$$

welcher folgende Werthe entsprechen:

$$x = \varrho\,(cotg\, \psi - tang\, \psi),$$
$$x = \varrho\,(\Theta\, cotg\, \psi - \Theta^2\, tang\, \psi),$$
$$x = \varrho\,(\Theta^2\, cotg\, \psi - \Theta\, tang\, \psi).$$

Um hierauf die Gleichung (7) mit der gegebenen Gleichung zu identifiziren, setzen wir

$$\varrho = \sqrt{p}, \quad cotg^3 \psi - tang^3 \psi = \frac{-2q}{\sqrt{p^3}};$$

und um ψ zu berechnen,

$$cotg\,\psi = \sqrt[3]{cotg\,\varphi},$$

wornach $cotg\,\varphi - tang\,\varphi = cotg^3\psi - tang^3\psi$,

ferner $cotg\,\varphi - tang\,\varphi = \frac{-2q}{\sqrt{p^3}}$, $cotg\,2\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}$.

Die Tafeln verschaffen sodann φ, nach φ ergibt sich ψ, und hiernach findet man nach einigen Reductionen, wie in §. 102, folgende drei Werthe von x:

$$x = 2\sqrt{p}\ cotg\,2\psi,$$
$$x = -\sqrt{p}\,(cotg\,2\psi - \sqrt{-3}\ cosec\,2\psi),$$
$$x = -\sqrt{p}\,(cotg\,2\psi + \sqrt{-3}\ cosec\,2\psi).$$

Die vorhergehenden Transformationen lassen sich in dem Falle, in welchem p negativ ist, durchaus nicht anwenden, weil alsdann $cotg\,2\varphi$ negativ würde *.

---

* Zur näheren Erläuterung und nöthigen Uebung lassen wir hier einige Beispiele über die trigonometrische und algebraische Auflösung der cubischen Gleichungen nachfolgen.

Beispiel 1. Man verlangt die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Trigonometrische Auflösung. Setzen wir die gegebene Gleichung in Relation mit der allgemeinen Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$, so erkennt man aus $q^2 + p^3 = (-1)^2 + (-1)^3 = 0$, daß die gegebene Gleichung dem irreductibeln Falle nicht angehört und nach der §. 101 betrachteten Gleichung

$$(3)\ x^3 - 3px + 2q = 0$$

aufgelöst werden kann, welche folgende drei Wurzeln hat:

1) $x = 2\sqrt{p}\ cosec\,2\psi$,

2) $x = -\sqrt{p}\,(cosec\,2\psi + \sqrt{-3}\ cotg\,2\psi)$,

3) $x = -\sqrt{p}\,(cosec\,2\psi - \sqrt{-3}\ cotg\,2\psi)$,

wenn $sin\,2\varphi = \frac{-p\sqrt{p}}{q}$, $tang\,\psi = \sqrt[3]{tang\,\varphi}$ gesetzt wird.

Um nun die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

nach den Wurzeln der Gleichung (3) zu finden, bemerken wir, daß hier

$3p = 3$, woraus $p = 1$,

$2q = -2$, woraus $q = -1$,

$$sin\,2\varphi = \frac{-p\sqrt{p}}{q} = 1,$$

$$2\varphi = 90^0,\quad \varphi = 45^0,$$
$$tang\ \varphi = tang\ 45^0 = 1,$$
$$tang\ \psi = \sqrt[3]{tang\ \varphi} = \sqrt[3]{1} = 1,$$
$$\psi = 45^0,\ 2\psi = 90^0,$$
$$cosec\ 2\psi = cosec\ 90^0 = 1,$$
$$cotg\ 2\psi = cotg\ 90^0 = 0;$$ also

1) $x = 2\sqrt{p}\ cosec\ 2\psi = 2,$

2) $x = -\sqrt{p}\,(cosec\ 2\psi + \sqrt{-3}\ cotg\ 2\psi) = -1,$

3) $x = -\sqrt{p}\,(cosec\ 2\psi - \sqrt{-3}\ cotg\ 2\psi) = -1.$

Algebraische Auflösung. Die Wurzeln der allgemeinen Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$ sind

1) $x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$

2) $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$

3) $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$

Um nun die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

nach diesen Wurzeln zu finden, setzen wir

$$3p = -3, \text{ woraus } p = -1,$$
$$2q = -2, \text{ woraus } q = -1,$$

und erhalten

$$\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{1} = 1,$$
$$\sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{1} = 1;$$ also

1) $x = 1 + 1 = 2,$

2) $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot 1 + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot 1 = -1,$

3) $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot 1 + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot 1 = -1.$

Beispiel 2. Man verlangt die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 3x - 14 = 0.$$

Trigonometrische Auflösung. Setzt man die gegebene Gleichung in Relation mit der allgemeinen Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$, so erkennt man aus $q^2 + p^3 = (-7)^2 + 1^3 > 0$, daß die gegebene Gleichung dem irreductibeln Falle nicht angehört und nach der §. 102 betrachteten Gleichung

$$(4)\ x^3 + 3px + 2q = 0$$

aufgelöst werden kann, welche folgende Wurzeln hat:

1) $x = 2\sqrt{p}\, cotg\, 2\psi$,

2) $x = -\sqrt{p}\,(cotg\, 2\psi - \sqrt{-3}\, cosec\, 2\psi)$,

3) $x = -\sqrt{p}\,(cotg\, 2\psi + \sqrt{-3}\, cosec\, 2\psi)$,

wenn $cotg\, 2\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}$, $cotg\, \psi = \sqrt[3]{cotg\, \varphi}$ gesetzt wird.

Um nun die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

nach den Wurzeln der Gleichung (4) zu finden, bemerken wir, daß hier

$$3p = 3, \quad \text{woraus } p = 1,$$
$$2q = -14, \text{ woraus } q = -7,$$
$$cotg\, 2\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}} = 7,$$

$$log\, cotg\, 2\varphi = log\, 7 = 0{,}8450980,$$
$$2\varphi = 8^0\ 7'\ 48{,}4'', \quad \varphi = 4^0\ 3'\ 54{,}2'',$$
$$cotg\, \psi = \sqrt[3]{cotg\, \varphi} = \sqrt[3]{cotg\, 4^0\ 3'\ 54{,}2''}$$
$$log\, cotg\, \psi = \frac{1}{3} log\, cotg\, 4^0\ 3'\ 54{,}2'' = 0{,}3827758.$$
$$\psi = 22^0\ 30',\ 2\psi = 45^0,$$
$$cotg\, 2\psi = cotg\, 45^0 = 1,$$
$$cosec\, 2\psi = cosec\, 45^0 = \sqrt{2}; \text{ also}$$

1) $x = 2\sqrt{p}\, cotg\, 2\psi = 2$,

2) $x = -\sqrt{p}\,(cotg\, 2\psi - \sqrt{-3}\, cosec\, 2\psi) = -(1 - \sqrt{-6})$,

3) $x = -\sqrt{p}\,(cotg\, 2\psi + \sqrt{-3}\, cosec\, 2\psi) = -(1 + \sqrt{-6})$.

Algebraische Auflösung. Die allgemeine Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$ hat folgende Wurzel:

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Um nun eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

nach dieser Wurzel zu finden, setzen wir

$$3p = 3, \quad \text{woraus } p = 1,$$
$$2q = -14, \text{ woraus } q = -7,$$

und erhalten

$$\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = 1 + \sqrt{2},$$
$$\sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 1 - \sqrt{2}$$

(siehe weiter unten 2., zweite Reductions-Methode, Beisp. 2. die Reduction dieser Ausdrücke); also

$$x = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2.$$

Es ist ferner $\frac{x^3 + 3x - 14}{x - 2} = x^2 + 2x + 7$,

und die Gleichung $x^2 + 2x + 7 = 0$
verschafft $x = -1 \pm \sqrt{-6}$.

Beispiel 3. Man verlangt die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 49x - 120 = 0.$$

Trigonometrische Auflösung. Setzt man die gegebene Gleichung in Relation mit der allgemeinen Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$, so erkennt man aus $q^2 + p^3 = (-60)^2 + \left(-\frac{49}{3}\right)^3 < 0$, daß die gegebene Gleichung dem irreductibeln Falle angehört und nach der §. 100 betrachteten Gleichung

$$(1)\ x^3 - 3px + 2q = 0$$

aufgelöst werden kann, welche die Wurzel

$$x = 2\sqrt{p}\ cos \frac{1}{2}\varphi$$

hat, wenn $cos\ \varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}$ gesetzt wird.

Um nun eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 49x - 120 = 0$$

nach dieser Wurzel der Gleichung (1) zu finden, bemerken wir, daß hier

$$3p = 49, \quad \text{woraus } p = \frac{49}{3},$$

$$2q = -120, \text{ woraus } q = -60,$$

$$cos\ \varphi = -\frac{q}{\sqrt{p^3}} = \frac{60}{\sqrt{\left(\frac{49}{3}\right)^3}},$$

$$log\ cos\ \varphi = log\ 60 - \frac{3}{2}(log\ 49 - log\ 3) = 0{,}9585391 - 1,$$

$$\varphi = 24^0\ 38'\ 22{,}7''; \text{ also}$$

$$x = 2\sqrt{p}\ cos \frac{1}{3}\varphi = 2\sqrt{\frac{49}{3}}\ cos\ 8^0\ 12'\ 47{,}5'',$$

$$log\ x = log\ 2 + \frac{1}{2}(log\ 49 - log\ 3) + log\ cos\ 8^0\ 12'\ 47{,}5'' = 0{,}9030900,$$

und hiernach $x = 8$.

Es ist ferner $\frac{x^3 - 49x - 120}{x - 8} = x^2 + 8x + 15$,

und die Gleichung $x^2 + 8x + 15 = 0$
verschafft $x = -3$ und $x = -5$,

wornach somit 8, −3 und −5 die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Algebraische Auflösung. Aus dem Vorzeichen des letzten Gliedes der Gleichung

$$x^3 - 49x - 120 = 0$$

erkennt man, daß diese Gleichung wenigstens eine reelle positive Wurzel hat. Setzt man hierauf, um die obere Grenze der reellen positiven Wurzeln zu bestimmen,

$$x^3 - 49x - 120 = x(x^2 - 49) - 120 = 0,$$

so erhält man sogleich die positive Wurzel $x = 8$; ꝛc.

Beispiel 4. Man verlangt die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Trigonometrische Auflösung. Setzt man die gegebene Gleichung in Relation mit der allgemeinen Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$, so erkennt man aus $q^2 + p^3 = 3^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^3 < 0$, daß die gegebene Gleichung dem irreductibeln Falle angehört und nach der §. 100 betrachteten allgemeinen Gleichung

$$(1)\ x^3 - 3px + 2q = 0$$

aufgelöst werden kann, welche die Wurzel

$$x = 2\sqrt{p}\, cos\, \frac{1}{3}\varphi$$

hat, wenn $cos\, \varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}$ gesetzt wird.

Um nun eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

nach dieser Wurzel der Gleichung (1) zu finden, bemerken wir, daß hier

$$3p = 7, \text{ woraus } p = \frac{7}{3},$$

$$2q = 6, \text{ woraus } q = 3,$$

$$cos\, \varphi = -\frac{q}{\sqrt{p^3}} = -\frac{3}{\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^3}},$$

$$-cos\, \varphi = cos\, (180^0 - \varphi) = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^3}},$$

$$log\, cos(180^0 - \varphi) = log\, 3 - \frac{3}{2}(log\, 7 - log\, 3) = 0{,}9251563 - 1,$$

$$180^0 - \varphi = 32^0\ 40'\ 48{,}6'',$$

$$\varphi = 147^0\ 19'\ 11{,}4''; \text{ also}$$

$$x = 2\sqrt{p}\, cos\, \frac{1}{3}\varphi = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\, cos\, 49^0\ 6'\ 23{,}8'',$$

$$log\, x = log\, 2 + \frac{1}{2}(log\, 7 - log\, 3) + log\, cos\, 49^0 6' 23{,}8'' = 0{,}3010299$$

und hiernach $x = 2$.

Es ist ferner $\frac{x^3 - 7x + 6}{x - 2} = x^2 + 2x - 3$,

und die Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$

verschafft $x = 1$ und $x = -3$,

wornach somit 2, 1 und -3 die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Algebraische Auflösung. Aus den Vorzeichen der Glieder der Gleichung

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

erkennt man, daß diese Gleichung nicht mehr als zwei reelle positive Wurzeln haben kann. Untersucht man hierauf, ob die positiven Theile des letzten Gliedes 6, d. i. 1, 2, 3, 6, der Gleichung als Wurzeln entsprechen, so erhält man sogleich die zwei positiven Wurzeln $x = 1$ und $x = 2$; ꝛc.

2. Die Auflösung der cubischen Gleichungen mittelst der Cardanischen Formel führt, wie wir gesehen haben, auf Wurzelgrößen von der Form $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$. Sind nun A und B Rationalzahlen, so lassen sich solche Ausdrücke häufig auf einfachere reduciren, und es können alsdann aus diesen irrationalen Ausdrücken sogar rationale Wurzeln für die cubischen Gleichungen entstehen. (Siehe in 1. die algebraische Auflösung des Beisp. 2.)

Erste Reductions-Methode.

Fourcy entwickelt (in seinen Leçons d'algèbre) die Reduction des Ausdruckes $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ auf folgende Weise:

Da $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3 = a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + b\sqrt{b}$
$$= (a + 3b)\sqrt{a} + (3a + b)\sqrt{b},$$

so darf man nicht annehmen, daß sich der Ausdruck $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ auf eine Größe von der Form $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ zurückführen lasse. Erhebt man dagegen den Ausdruck $a + \sqrt{b}$, oder den noch allgemeinern Ausdruck $(a + \sqrt{b})\sqrt[3]{c}$ auf die dritte Potenz, so erhält man ein Resultat von der Form $A + \sqrt{B}$.

Man setze daher

$$(1) \quad \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = (a + \sqrt{b})\sqrt[3]{c},$$

und erhält durchs Erheben zur dritten Potenz

$$A + \sqrt{B} = c(a^3 + 3ab) + c(3a^2 + b)\sqrt{b},$$

ferner durch die Gleichsetzung der rationalen und irrationalen Glieder der beiden Theile dieser Gleichung

$$(2)\ A = c(a^3 + 3ab), \quad (3)\ \sqrt{B} = c(3a^2 + b)\sqrt{b}.$$

Nun handelt es sich darum, für a, b und c rationale Werthe zu finden, welche diesen zwei Gleichungen genügen. Erhebt man zu diesem Behufe die beiden Gleichungen ins Quadrat, so erhält man

$$A^2 - B = c^2(a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3) = c^2(a^2 - b)^3,$$

$$\text{woraus } a^2 - b = \frac{\sqrt[3]{(A^2 - B)c}}{c}.$$

Damit nun a und b rational werden, muß man für c einen Werth wählen, der $(A^2 - B)c$ in eine vollkommene, ganze oder gebrochene, Cubikzahl verwandelt, was stets möglich ist. Heißt man alsdann M den zweiten Theil der letzten Gleichung, so ist

$$a^2 - b = M, \text{ woraus } b = a^2 - M,$$

und es verwandelt sich die Gleichung (2) durch die Substitution des Werthes von b in

$$(4)\ 4ca^3 - 3Mca - A = 0,$$

welche Gleichung für a wenigstens einen rationalen Werth abgeben muß, wenn die in (1) vorliegende Transformation ausführbar seyn soll.

Hätte man anstatt des Ausdruckes $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ den Ausdruck $\sqrt[3]{A - \sqrt{B}}$ zu reduciren, so würde es genügen, im Vorhergehenden überall $- \sqrt{b}$ anstatt $+ \sqrt{b}$ zu substituiren.

Beispiel 1. Den Ausdruck $\sqrt[3]{14 \pm \sqrt{200}}$ zu vereinfachen.

Auflösung. Hier ist $A = 14$, $B = 200$, $A^2 - B = -4$, $(A^2 - B)c = -4c$. Setzt man daher $c = 2$, so erhält man

$$M = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-8} = -1, \quad b = a^2 + 1,$$

und die Gleichung (4) verwandelt sich durch die Substitution des Werthes von b in

$$8a^3 + 6a - 14 = 0,$$

welcher Gleichung $a = 1$ genügt, wornach endlich $b = 1 + 1 = 2$ und der Ausdruck

$$\sqrt[3]{14 \pm \sqrt{200}} = (1 \pm \sqrt{2})\sqrt[3]{2}.$$

Beispiel 2. Den Ausdruck $\sqrt[3]{-11 \pm 2\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{-11 \pm \sqrt{-4}}$ zu vereinfachen.

Auflösung. Hier ist $A = -11$, $B = -4$, $A^2 - B = 125$, $(A^2 - B)c = 125\,c$. Setzt man daher $c = 1$, so erhält man

$$M = \sqrt[3]{125} = 5, \quad b = a^2 - 5,$$

und die Gleichung (4) verwandelt sich durch die Substitution des Werthes von b in

$$4a^3 - 15a + 11 = 0,$$

welcher Gleichung $a = 1$ genügt, wornach endlich $b = 1 - 5 = -4$ und der Ausdruck

$$\sqrt[3]{-11 \pm 2\sqrt{-1}} = 1 \pm \sqrt{-4}.$$

Beispiel 3. Wird die Gleichung

$$x^3 - \frac{15}{2}x + 290\frac{1}{2} = 0$$

nach der Cardanischen Formel aufgelöst, so findet sich

$$x = \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}},$$

welcher Ausdruck reducirt werden soll.

Auflösung. Wir bringen den Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{-581+\sqrt{337311}}{4}}$ unter die Form $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{1162-\sqrt{1349244}}$, wo alsdann $A = 1162$, $B = 1349244$, $A^2 - B = 1000$, $(A^2 - B)c = 1000\,c$; setzen ferner $c = 1$ und erhalten

$$M = \sqrt[3]{1000} = 10, \quad b = a^2 - 10,$$

und durch die Substitution des Werthes von b in (4)

$$4a^3 - 30a - 1162 = 0,$$

welcher Gleichung $a = 7$ genügt, wornach also $b = 49 - 10 = 39$,

$$\sqrt[3]{\frac{-581+\sqrt{337311}}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{1162-\sqrt{1349244}} = -\frac{1}{2}(7-\sqrt{39}),$$

$$\sqrt[3]{\frac{-581-\sqrt{337311}}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{1162+\sqrt{1349244}} = -\frac{1}{2}(7+\sqrt{39}),$$

$$x = -\frac{1}{2}(7-\sqrt{39}) - \frac{1}{2}(7+\sqrt{39}) = -7.$$

Beispiel 4. Löst man die Gleichung

$$x^3 + 6x^2 + 20x + 15 = 0$$

nach der Cardanischen Formel auf, so findet sich

$$x = -2 + \sqrt[3]{\frac{81+\sqrt{12705}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{81-\sqrt{12705}}{18}},$$

welcher Ausdruck reducirt werden soll.

Auflösung. Wir bringen den Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{81+\sqrt{12705}}{18}}$ unter die Form $\frac{1}{6}\sqrt[3]{972+\sqrt{1829520}}$, wo alsdann $A = 972$, $B = 1829520$, $A^2 - B = -884736$, $(A^2 - B)c = -884736\,c$; setzen ferner $c = 1$ und erhalten

$$M = -\sqrt[3]{884736} = -96, \quad b = a^2 + 96,$$

und durch die Substitution des Werthes von b in (4)

$$4a^3 + 288a - 972 = 0,$$

welcher Gleichung $a = 3$ genügt, wornach also $b = 9 + 96 = 105$,

$$\sqrt[3]{\frac{81+\sqrt{12705}}{18}} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{972+\sqrt{1829520}} = \frac{1}{6}(3+\sqrt{105}),$$

$$\sqrt[3]{\frac{81-\sqrt{12705}}{18}} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{972-\sqrt{1829520}} = \frac{1}{6}(3-\sqrt{105}),$$

$$x = -2 + \frac{1}{6}(3+\sqrt{105}) + \frac{1}{6}(3-\sqrt{105}) = -1.$$

Beispiel 5. Durch die Auflösung der Gleichung

$$x^3 - 15x^2 + 71x - 297 = 0$$

nach der Cardanischen Formel findet sich

$$x = 5 + \sqrt[3]{\frac{864+\sqrt{746304}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{864-\sqrt{746304}}{9}},$$

welcher Ausdruck zu vereinfachen ist.

Auflösung. Behandelt man den Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{864+\sqrt{746304}}{9}}$ unter der Form $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2592+\sqrt{6716736}}$, so ist $A = 2592$, $B = 6716736$, $A^2 - B = 1728$, $(A^2 - B)c = 1728c$. Setzt man daher $c = 1$, so wird

$$M = \sqrt[3]{1728} = 12,\ b = a^2 - 12,$$

und die Gleichung (4) verwandelt sich in

$$4a^3 - 36a - 2592 = 0,$$

welcher Gleichung $a = 9$ entspricht, wornach also $b = 81 - 12 = 69$,

$$\sqrt[3]{\frac{864+\sqrt{746304}}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2592+\sqrt{6716736}} = \frac{1}{3}(9+\sqrt{69}),$$

$$\sqrt[3]{\frac{864-\sqrt{746304}}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2592-\sqrt{6716736}} = \frac{1}{3}(9-\sqrt{69}),$$

$$x = 5 + \frac{1}{3}(9+\sqrt{69}) + \frac{1}{3}(9-\sqrt{69}) = 11.$$

Beispiel 6. Durch die Auflösung der Gleichung

$$x^3 - 12x^2 + 36x - 7 = 0$$

nach der Cardanischen Formel findet sich

$$x = 4 + \sqrt[3]{\frac{-9+\sqrt{-175}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9-\sqrt{-175}}{2}},$$

welcher Ausdruck zu reduciren ist.

Auflösung. Behandelt man den Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{-9+\sqrt{-175}}{2}}$ unter der Form $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{36-\sqrt{-2800}}$, so ist $A = 36$, $B = -2800$, $A^2 - B = 4096$, $(A^2 - B)c = 4096\,c$. Setzt man daher $c = 1$, so wird

$$M = \sqrt[3]{4096} = 16, \quad b = a^2 - 16,$$

und die Gleichung (4) verwandelt sich in

$$4a^3 - 48a - 36 = 0,$$

welcher Gleichung $a = -3$ entspricht, wornach also $b = 9 - 16 = -7$,

$$\sqrt[3]{\frac{-9+\sqrt{-175}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{36-\sqrt{-2800}} = -\frac{1}{2}(-3-\sqrt{-7}),$$

$$\sqrt[3]{\frac{-9-\sqrt{-175}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{36+\sqrt{-2800}} = -\frac{1}{2}(-3+\sqrt{-7}),$$

$$x = 4 - \frac{1}{2}(-3-\sqrt{-7}) - \frac{1}{2}(-3+\sqrt{-7}) = 7.$$

Zweite Reductions-Methode.

Wir theilen hier noch eine andere Reductions-Methode mit, welche in den Fällen, in welchen sie anwendbar ist, die vorhergehende allgemeinere Reductions-Methode an Leichtigkeit und schnellem Erfolge bei der Ausführung übertrifft.

Aus $(a \pm \sqrt{b})^3 = a^3 + 3ab \pm (3a^2 + b)\sqrt{b}$ folgt

$$a \pm \sqrt{b} = \sqrt[3]{a^3 + 3ab \pm (3a^2 + b)\sqrt{b}},$$

eine Gleichung, welche in manchen Fällen ein sehr einfaches Mittel darbietet, zu untersuchen, ob sich die dritte Wurzel aus einem Ausdrucke von der Form $A \pm C\sqrt{B}$ ausziehen oder auf die Form $a \pm \sqrt{b}$ reduciren lasse.

Setzt man nämlich

$$1)\ \sqrt{b} = \sqrt{B}, \quad 2)\ 3a^2 + b = C,$$

und es wird alsdann auch

$$3)\ a^3 + 3ab = A,$$

so erhellt von selbst, daß

$$\sqrt[3]{A \pm C\sqrt{B}} = a \pm \sqrt{b};$$

ist jedoch die dritte Gleichung keine Folge der zwei ersten Gleichungen, so kann die in Frage stehende Reduction auf diesem Wege nicht ausgeführt werden, und man muß alsdann seine Zuflucht noch zur ersten Reductions-Methode nehmen.

Beispiel 1. Löst man die Gleichung

$$x^3 - 6x - 40 = 0$$

nach der Cardanischen Formel auf, so findet sich

$$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}},$$

welcher Ausdruck reducirt werden soll.

Auflösung. Wir bringen den Ausdruck $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$ unter die Form $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$, setzen hierauf

1) $\sqrt{b} = \sqrt{2}$, woraus $b = 2$,

2) $3a^2 + 2 = 14$, woraus $a = 2$,

und erhalten durch die Substitution von $a = 2$, $b = 2$,

3) $8 + 12 = 20$.

Es ist daher

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2},$$

$$\sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2},$$

$$x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$$

Beispiel 2. Durch die Auflösung der Gleichung

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

nach der Cardanischen Formel findet sich

$$x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}},$$

welcher Ausdruck zu reduciren ist.

Auflösung. Wir bringen den Ausdruck $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$ unter die Form $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$, setzen hierauf

1) $\sqrt{b} = \sqrt{2}$, woraus $b = 2$,

2) $3a^2 + 2 = 5$, woraus $a = 1$,

und erhalten durch die Substitution von $a = 1$, $b = 2$,

3) $1 + 6 = 7$.

Es ist daher

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2},$$

$$\sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2},$$

$$x = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2.$$

Neunte Abhandlung.

Die Berechnung des Fehlers, welcher aus der Anwendung der Proportion entspringt, die der Gebrauch der Logarithmentafeln vorschreibt.

§. 106.

Um die Logarithmen der ganzen Zahlen und der Decimalbrüche zu berechnen, welche in den gewöhnlichen Tafeln nicht enthalten sind, und um wieder zu diesen Logarithmen die ihnen entsprechenden Zahlen zu finden, setzt man voraus

1) daß sich die Differenzen der Zahlen zu einander verhalten, wie die Differenzen ihrer Logarithmen;

2) daß die in den Tafeln enthaltenen Logarithmen ganz genau sind.

Diese beiden Sätze sind jedoch strenge genommen unrichtig. Es ist daher nothwendig, zuvor zu zeigen, auf welchen Sätzen die obige Proportion beruht, und hierauf sowohl den Grad der Näherung, welche diese Proportion verschafft, als auch den Fehler zu berechnen, welchen sie hervorbringen kann, wenn man die beiden Ursachen der Ungenauigkeit in Anschlag bringt, mit welchen sie behaftet ist.

Erstes Princip. Es seyen $n + 1$ und n zwei auf einander folgende ganze Zahlen; die Differenz ihrer Logarithmen $\triangle$, oder $l(n+1) - ln$, nimmt in dem Maße ab, in welchem n zunimmt, und ist stets kleiner als der Bruch $\frac{1}{2n}$.

In der That, man hat

$$l(n+1) - ln = l\left(\frac{n+1}{n}\right) = l\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

was schon beweist, daß $\triangle$ um so weniger von $l1 = 0$ differirt, je größer n ist.

Substituirt man hierauf in der bekannten Formel

$$l(1+x) = A\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots\right)^*$$

$x = \frac{1}{n}$, so erhält man

$$\triangle = l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = A\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \text{zc.}\right),$$

eine Reihe, welche den Werth von $\triangle$ mit um so größerer Genauigkeit verschafft, je größer n ist.

Da überdieß $A = 0{,}43\ldots < \frac{1}{2}$ **, und die Reihe $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \text{zc.} < \frac{1}{n}$ ist ***, so folgt hieraus nothwendigerweise, daß $\triangle < \frac{1}{2n}$, was zu beweisen war.

Es sey z. B. $n = 10000$, so wird

$$\triangle < \frac{1}{20000} < 0{,}00005;$$

d. h. die Differenz ist kleiner als die Hälfte von der Einheit der vierten Decimalstelle.

Hiedurch erklärt es sich, wie man in den Tafeln von Callet von der Zahl 10000 an auf eine Seite eine so große Anzahl von Logarithmen setzen konnte. Jede Seite enthält 60 Horizontalzeilen,

---

* Siehe §. 95, Note 4. (V).

** Es ist nämlich $A = log\, e$ [§. 95, Note 4. (VI)] $= log\, 2{,}718\ldots$ [§. 95, Note 3. (IV)] $= 0{,}434\ldots$

*** Schreibt man die Reihe

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{5n^5} - \ldots$$

unter der Form

$$\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) - \left(\frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5}\right) - \ldots,$$

so erkennt man sogleich, daß ihre Glieder, welche stets kleiner werden, zusammen $< \frac{1}{n}$ sind.

jede Zeile 10 Logarithmen; und da aus dem so eben Gesagten hervorgeht, daß die drei ersten Decimalstellen nothwendigerweise selbst mehreren zehn auf einander folgenden Logarithmen gemeinschaftlich sind, so genügte es, diese drei Ziffern ein einziges Mal auf den Rand und die vier übrigen, welche der Veränderung der Zahl correspondiren, zur Seite zu setzen.

Da sich die Tafeln von Callet bis zur Zahl 108000 ausdehnen, so hat man für alle Zahlen über 100000 die vier ersten Decimalziffern auf den Rand gesetzt (weil in diesem Falle $\triangle < 0{,}000005$), wodurch es möglich wurde, die Logarithmen dieser Zahlen mit acht anstatt mit sieben Ziffern darzustellen, ohne in der für die Zahlen zwischen 10000 und 100000 getroffenen Einrichtung etwas zu ändern.

§. 107.

Zweites Princip. Sind $\triangle = l(n+1) - ln$ und $\triangle' = l(n+2) - l(n+1)$ zwei auf einander folgende logarithmische Differenzen, so können dieselben als gleich angesehen werden, wenn $n > 10000$ ist.

In der That, man hat

$$\triangle = l(n+1) - ln = l\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

$$\triangle' = l(n+2) - l(n+1) = l\left(\frac{n+2}{n+1}\right);$$

woraus $\triangle - \triangle' = l\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) = l\left[1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right].$

Substituirt man hierauf in der bekannten Formel

$$l(1+x) = A\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots\right)$$

$x = \dfrac{1}{n(n+2)}$, so erhält man

$$\triangle - \triangle' = A\left[\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{2n^2(n+2)^2} + \frac{1}{3n^3(n+2)^3} - \ldots\right].$$

Da nun $A = 0{,}43\ldots < \dfrac{1}{2}$, und

die Reihe $\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{2n^2(n+2)^2} + \text{zc.} < \frac{1}{n(n+2)}$ *,

so muß $\triangle - \triangle' < \frac{1}{2n(n+2)}$ seyn.

Es sey z. B. $n = 10000$, so wird

$$\triangle - \triangle' < \frac{1}{20000 \,.\, 10002} < \frac{1}{200040000} < 0{,}000000005,$$

d. h. die Differenz zwischen zwei auf einander folgenden Differenzen der Logarithmen der Zahlen über 10000 ist kleiner als die Hälfte von der Einheit der achten Decimalstelle.

Hieraus erhellt, warum in den Logarithmentafeln bei den Zahlen über 10000 die Differenzen zwischen zwei auf einander folgenden Logarithmen gesetzt werden konnten. Man kann diese Differenzen für eine große Anzahl von Logarithmen als constant ansehen, weil der Uebergang von einer Differenz zur andern erst in der neunten Decimalstelle fühlbar wird, und die Tafeln nur sieben Decimalstellen enthalten.

§. 108.

Folgerung aus den zwei vorhergehenden Sätzen.

Nehmen wir für den Augenblick an, daß bei allen Zahlen über 10000 gleichen Zunahmen der Zahlen gleiche Zunahmen der Logarithmen entsprechen, was nach dem Vorhergehenden beinahe genau ist: so läßt sich nachweisen, daß alsdann die Differenzen der Logarithmen den Differenzen der Zahlen proportionirt sind.

Denn gesetzt, n und n + 1 seyen zwei auf einander folgende

---

* Es ist die Reihe

$$\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{2n^2(n+2)^2} + \frac{1}{3n^3(n+2)^3} - \frac{1}{4n^4(n+2)^4} + \frac{1}{5n^5(n+2)^5} - \ldots,$$

$$= \frac{1}{n(n+2)} - \left[\frac{1}{2n^2(n+2)^2} - \frac{1}{3n^3(n+2)^3}\right] - \left[\frac{1}{4n^4(n+2)^4} - \frac{1}{5n^5(n+2)^5}\right] - \ldots,$$

unter welcher Form man sogleich erkennt, daß ihre Glieder, welche stets kleiner werden, zusammen $< \frac{1}{n(n+2)}$ sind.

ganze Zahlen über 10000, $n + \frac{p}{q}$ eine zwischen n und $n + 1$ enthaltene gebrochene Zahl; so kann man die drei Zahlen n, $n + \frac{p}{q}$, $n + 1$ als die Glieder einer arithmetischen Progression ansehen, in welcher n das erste Glied, $\frac{1}{q}$ die Differenz, $n + \frac{p}{q}$ das $(p + 1)$te Glied, $n + \frac{p}{q} = n + 1$ das letzte Glied ist, wornach also

$$\div n \,.\, n + \frac{1}{q} \,.\, n + \frac{2}{q} \ldots n + \frac{p}{q} \ldots n + \frac{q-1}{q} \,.\, n + 1.$$

Da nun der Voraussetzung gemäß die Differenzen zwischen den Logarithmen der auf einander folgenden ganzen Zahlen einander gleich sind, so können mit noch größerem Rechte die Differenzen zwischen den Logarithmen von n, $n + \frac{1}{q}$, $n + \frac{2}{q}$, ... als gleich angesehen werden. Setzt man daher $l\left(n + \frac{1}{q}\right) - ln = \delta$, so erhält man für die Logarithmen, welche der obigen Reihe entsprechen,

$$\div ln \,.\, ln + \delta \,.\, ln + 2\delta \ldots ln + p\delta \ldots ln + q\delta \text{ oder } l(n + 1);$$

und hieraus folgt nothwendig die Proportion

$$(n+1) - n : \left(n + \frac{p}{q}\right) - n = (ln + q\delta) - ln : (ln + p\delta) - ln,$$

weil sich dieselbe auf

$$1 : \frac{p}{q} = q\delta : p\delta,$$

$$\text{oder } q : p = q : p$$

reducirt.

Die Giltigkeit dieser Proportion erstreckt sich nach der vorhergehenden Entwicklung auf die Fälle, in welchen die Zahlen sehr groß sind und höchstens um 1 von einander differiren.

Wir werden nun den Fehler berechnen, welchen diese Proportion veranlaßt, und zu diesem Behufe die beiden Ursachen nach einander betrachten, aus denen, wie bereits angeführt worden ist, dieser Fehler entspringt.

§. 109.

Berechnen wir zuerst den Fehler, welcher aus der Ungenauigkeit der Proportion entsteht (die angewandten Logarithmen als bekannt vorausgesetzt).

Es sey die Zahl n größer als 10000, l der Logarithme von n, $l + \triangle$ der Logarithme von $n + 1$; ferner bezeichne $n + \delta$ eine zwischen n und $n + 1$ fallende Zahl, $l + m\triangle$ den Logarithmen von $n + d$, wo d und m Brüche vorstellen. (Die sämmtlichen Zahlen n, l, $\triangle$, d, m beziehen sich auf dieselbe Einheit.) Berechnet man nun die Größe x, welche zu l addirt werden muß, um den Logarithmen von $n + d$ zu erhalten, durch die Proportion

$$1 : d = \triangle : x, \text{ woraus } x = d\triangle,$$

(was stets geschieht, indem man die in den Logarithmentafeln enthaltenen Proportionaltheile zur Anwendung bringt) so erhält man $l + d\triangle$ für den gesuchten Logarithmen, indeß derselbe $= l + m\triangle$ seyn soll.

Der durch die Anwendung dieser Proportion begangene Fehler beträgt somit

$$e = (m - d)\triangle, \text{ oder } e = (d - m)\triangle,$$

je nachdem $m >$ oder $< d$.

Berechnet man ebenso die Größe y, welche zu n addirt werden muß, um die dem Logarithmen $l + m\triangle$ entsprechende Zahl zu erhalten, durch die Proportion

$$\triangle : m\triangle = 1 : y, \text{ woraus } y = m,$$

(was wiederum stets geschieht, indem man die in den Logarithmentafeln enthaltenen Proportionaltheile anwendet) so erhält man $n + m$ für die gesuchte Zahl, indeß dieselbe $= n + d$ seyn soll.

Der durch die Anwendung dieser Proportion begangene Fehler beträgt somit

$$e' = m - d, \text{ oder } e' = d - m.$$

Man sieht hieraus, daß der Fehler in beiden Fällen da herrührt, daß von den Größen m und d die eine für die andere genommen wird. Es ist also die Differenz dieser zwei Größen auszumitteln.

Geht man zu diesem Behufe von den Fundamentalgleichungen

$$10^l = n, \quad 10^{l+\triangle} = n + 1, \quad 10^{l+m\triangle} = n + d\ *$$

aus, so erhält man, wenn die zweite durch die erste dividirt wird,

$$10^{\triangle} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

und hiernach $10^{m\triangle} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$;

ferner, wenn die so eben erhaltene Gleichung mit der ersten ($10^l = n$) multiplicirt wird,

$$10^{l+m\triangle} \text{ oder } n + d = n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

Entwickelt man hierauf $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$ nach dem binomischen Lehrsatze, multiplicirt sodann die beiden Theile der erhaltenen Gleichung mit n, und subtrahirt hernach n von den beiden Theilen des Resultates, so erhält man

$$d = \frac{m}{1} - \frac{m(1-m)}{1.2.n} + \frac{m(1-m)(2-m)}{1.2.3.n^2} - \text{etc. } **.$$

Wird in dieser Reihe das Glied, welches r Glieder vor sich

---

* Zum richtigen Verstehen dieser Gleichungen bedarf es wohl kaum der Bemerkung, daß im Briggs'schen Logarithmensysteme, welches 10 zur Basis hat,

$$0 = \log 1, \quad \text{weil } 10^0 = 1,$$
$$1 = \log 10, \quad - \ 10^1 = 10,$$
$$2 = \log 100, \quad - \ 10^2 = 100,$$

überhaupt $x = \log N$, wenn $10^x = N$.

** Auf die angegebene Weise findet man successive:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m = 1 + m.\frac{1}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2}.\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}.\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \ldots$$

$$n\left(1+\frac{1}{n}\right)^m = n + d = n + m + \frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{1}{n} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.\frac{1}{n^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}.\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$d = m + \frac{m(m-1)}{1.2.n} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.n^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.n^3} + \ldots$$

$$= m - \frac{m(1-m)}{1.2.n} + \frac{m(1-m)(2-m)}{1.2.3.n^2} - \frac{m(1-m)(2-m)(3-m)}{1.2.3.4.n^3} + \ldots$$

hat, durch das zunächst vorhergehende dividirt, so erhält man $-\frac{r-m}{r+1} \cdot \frac{1}{n}$ *, eine Größe, welche offenbar negativ und kleiner als 1 ist, da $m < 1$ und $n > 1$. Die Glieder dieser Reihe sind also abwechslungsweise positiv und negativ und nehmen unbestimmt ab. Es ist daher

$$d < m,\ d > m - \frac{m(1-m)}{2n}\ **$$

$$\text{und hiernach } m - d < \frac{m(1-m)}{2n}.$$

Da sich aber, wie man leicht erkennt, das Maximum des

---

* Es ist nämlich das $(r+1)$te Glied dieser Reihe

$$= \pm \frac{m(1-m)(2-m)\ldots(r-1-m)(r-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r \cdot (r+1) \cdot n^r},$$

das rte Glied dieser Reihe

$$= \mp \frac{m(1-m)(2-m)\ldots(r-1-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r \cdot n^{r-1}},$$

also der Quotient aus dem rten Gliede in das $(r+1)$te Glied

$$= -\frac{\dfrac{m(1-m)\ldots(r-1-m)(r-m)}{1 \cdot 2 \ldots r \cdot (r+1) \cdot n^r}}{\dfrac{m(1-m)\ldots(r-1-m)}{1 \cdot 2 \ldots r \cdot n^{r-1}}} = -\frac{r-m}{(r+1) \cdot n}.$$

** Es ist die Reihe

$$m - \frac{m(1-m)}{1 \cdot 2 \cdot n} + \frac{m(1-m)(2-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^2} - \frac{m(1-m)(2-m)(3-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^3} + \frac{m(1-m)(2-m)(3-m)(4-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^4} - \ldots$$

$$(1) = m - \left[\frac{m(1-m)}{1 \cdot 2 \cdot n} - \frac{m(1-m)(2-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^2}\right] - \left[\frac{m(1-m)(2-m)(3-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^3} - \frac{m(1-m)(2-m)(3-m)(4-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot n^4}\right] - \ldots$$

unter welcher Form man sogleich erkennt, daß die Glieder dieser Reihe, welche beständig kleiner werden, zusammen $< m$ sind;

$$(2) = m - \frac{m(1-m)}{1 \cdot 2 \cdot n} + \left[\frac{m(1-m)(2-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^2} - \frac{m(1-m)(2-m)(3-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^3}\right] + \ldots$$

unter welcher Form man sogleich erkennt, daß die Glieder dieser Reihe zusammen $< m - \frac{m(1-m)}{2n}$ sind.

Productes $m(1 - m)$ auf $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ beläuft *, so reducirt sich die letzte Ungleichheit auf

$$m - d < \frac{1}{8n},$$

wornach es nun leicht ist, die beiden Fehler

$$e = (m - d)\triangle, \quad e' = m - d$$

für $n =$, oder > 10000 zu berechnen.

1) Nach der vorhergehenden Ungleichheit ist

$$e < \frac{\triangle}{80000};$$

da nun $\triangle < \frac{0{,}0001}{2}$ (§. 106), so wird

$$e < \frac{0{,}0001}{160000} < \frac{0{,}00000001}{16}.$$

Es beträgt daher der Fehler e weniger als den 16ten Theil von der Einheit der achten Decimalstelle, und hat darum keinen Einfluß auf die sieben ersten Decimalen des Logarithmen.

2) Nach derselben Ungleichheit ist

$$e' < \frac{1}{80000} < \frac{0{,}0001}{8};$$

d. h. wenn man das vierte Glied $y = m$ in Decimalen abschätzt, um es zu n zu addiren, so hat der Fehler keinen Einfluß auf die vierte Decimalstelle, indeß die Genauigkeit der fünften Decimale unsicher ist.

§. 110.

Betrachten wir zweitens den **Fehler**, welcher aus der **Ungenauigkeit der Logarithmen entspringt** (die Proportion als genau vorausgesetzt).

---

* Setzt man, um das Maximum des Productes $x(1-x)$ zu bestimmen,

$$y = x(1 - x),$$

so erhält man aus dieser Gleichung

$$x^2 - x = - y,$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y},$$

und erkennt aus dem Werthe von x, daß das Product y nicht größer als $\frac{1}{4}$ werden kann (§. 6).

Zu diesem Behufe werden wir die in den Tafeln enthaltenen Logarithmen, sowie ihre Differenzen sämmtlich auf die Einheit der siebenten Decimalstelle beziehen, oder was auf dasselbe hinausläuft, sie alle 10000000 mal größer machen, oder als ganze Zahlen ansehen. Dieser Hypothese steht kein Hinderniß im Wege, insofern in der Proportion nur die Verhältnisse der Differenzen betrachtet werden.

Da nun die in den Tafeln enthaltenen Logarithmen im Allgemeinen fehlerhaft, und zwar entweder zu groß, oder zu klein um eine Größe sind, welche höchstens die Hälfte von der Einheit der letzten Decimalstelle beträgt *, so ist hier das Maximum dieses Fehlers $= \frac{1}{2}$ zu setzen.

Erste Aufgabe. Den Logarithmen einer gegebenen Zahl zu bestimmen.

Es sey $n + d$ eine Zahl, deren Logarithme gesucht wird, n bezeichnet den ganzen und d den gebrochenen Theil dieser Zahl; es seyen ferner l und l' respective die Logarithmen von n und $n + 1$, so wie sie in den Tafeln enthalten sind. Endlich mögen i und i' die Größen ausdrücken, welche man respective zu den Logarithmen l und l' addiren muß, um sie genau zu machen; i und i' können positiv oder negativ seyn, und haben nach dem, was so eben gesagt wurde, $\frac{1}{2}$ zum Maximum.

Vorausgesetzt nun, die Proportion sey genau, so fände man, daß der Logarithme von $n + d$ gleich $l + i +$ einer Größe x ist, welche folgende Proportion verschafft:

$$1 : d = (l' + i') - (l + i) : x,$$

woraus, wenn $l' - l = \triangle$ gesetzt wird,

$$x = d(\triangle + i' - i),$$

und somit $log(n + d) = l + i + d(\triangle + i' - i)$.

* Dieser Fehler, den alle Logarithmen mit einander gemein haben, deren Werth sich durch sieben Decimalen nur näherungsweise ausdrücken läßt, rührt von der in der Decimalbruch-Rechnung allgemein üblichen Correctur her, welche bekanntlich darin besteht, daß man z. B. — wenn bei der siebenten Decimalstelle abgebrochen werden soll — die Ziffer der siebenten Decimalstelle um eine Einheit dieser Stelle erhöht, so oft die Ziffer der darauf folgenden achten Decimalstelle = 5, oder > 5 ist.

Anstatt dessen bildet man aber die Proportion

$$1 : d = \triangle : x, \text{ woraus } x = d\triangle,$$

addirt hierauf $d\triangle$ zu l, wobei man den gebrochenen Theil des Productes $d\triangle$ vernachläßigt, dafür aber, wenn es angeht, die letzte Ziffer um eine Einheit vermehrt, wodurch sich ein neuer Fehler einschleichen kann, welcher $\frac{1}{2}$ zur Grenze hat. Drückt f diesen Fehler aus, so nimmt man also $l + d\triangle - f$ für den Logarithmen von $n + d$. Es ist daher der Endfehler

$$E = l + i + d(\triangle + i' - i) - l - d\triangle + f = i(1 - d) + i'd + f.$$

Angenommen nun, die drei Fehler i, i′ und f erreichen ihre Grenze $\frac{1}{2}$, in welchem Falle der Totalfehler E offenbar den möglich größten Werth hat, so wird

$$E = \frac{1}{2}(1 - d + d + 1) = 1;$$

d. h. beim Bestimmen des Logarithmen einer Zahl kann der Fehler, welcher von der Ungenauigkeit der in den Tafeln enthaltenen Logarithmen herrührt, höchstens eine positive, oder negative Einheit der siebenten, oder allgemein der letzten Decimalstelle der Logarithmen betragen, welche die gebrauchten Tafeln verschaffen.

Zweite Aufgabe. Die einem gegebenen Logarithmen entsprechende Zahl zu bestimmen.

Es sey $l + \delta$ ein zwischen l und l' enthaltener Logarithme, $\triangle$ bezeichne wieder $l' - l$, und δ ist höchstens $= \triangle - 1$.

Gewöhnlich bildet man die Proportion

$$\triangle : \delta = 1 : y, \text{ woraus } y = \frac{\delta}{\triangle},$$

und erhält $n + \frac{\delta}{n}$ für die gesuchte Zahl. Es ist aber der gegebene Logarithme $l + \delta$, wegen der Ungenauigkeit der in den Tafeln enthaltenen Logarithmen, eines positiven, oder negativen Fehlers fähig, welcher $+ i''$ heißen mag, der zur Grenze $\frac{1}{2}$ hat. Ueberdieß können die Logarithmen l und l', wie oben, um positive, oder negative Größen $+ i$ und $+ i'$ fehlerhaft seyn, die auch $\frac{1}{2}$ zur Grenze haben.

Man sollte also folgende Proportion bilden:

$$(l' + i') - (l + i) : (l + \delta + i'') - (l + i) = 1 : y,$$

oder $\triangle + i' - i : \delta + i'' - i = 1 : y,$

woraus $y = \frac{\delta + i'' - i}{\triangle + i' - i}$

und die gesuchte Zahl $= n + \frac{\delta + i' - i}{\triangle + i' - i}$.

Der Fehler, welcher entsteht, indem man $n + \frac{\delta}{n}$ anstatt dieses Ausdruckes nimmt, beträgt somit

$$(1)\ \frac{\delta + i'' - i}{\triangle + i' - i} - \frac{\delta}{\triangle}, \text{ oder } (2)\ \frac{\delta}{\triangle} - \frac{\delta + i'' - i}{\triangle + i' - i},$$

je nachdem $\frac{\delta + i'' - i}{\triangle + i' - i} >$ oder $< \frac{\delta}{\triangle}$.

Erster Fall. Um die größte Grenze der Differenz (1) zu finden, muß man das Maximum des Ausdruckes

$$\frac{\delta + i'' - i}{\triangle + i' - i}$$

zu bestimmen suchen.

Da nun bekanntlich ein Bruch größer wird, wenn man eine und dieselbe Größe zu seinem Zähler und Nenner addirt, so erhält man zuerst das Maximum dieses Ausdruckes in Bezug auf die Veränderung der Größe i, welche sich in seinem Zähler und Nenner befindet, wenn man $-i = +\frac{1}{2}$, d. i. den größten Werth substituirt, welchen die Größe i annehmen kann. Dieses Maximum ist

$$\frac{\delta + \frac{1}{2} + i''}{\triangle + \frac{1}{2} + i'}.$$

Man erhält hierauf das Maximum dieses Ausdruckes in Bezug auf die Veränderungen der Größen i'' und i', indem man mittelst dieser Größen seinen Zähler so groß als möglich und seinen Nenner so klein als möglich macht, substituirt daher $i'' = +\frac{1}{2}$, $i' = -\frac{1}{2}$, und findet für das Maximum des obigen Ausdruckes,

welches den Veränderungen der drei Größen i, i′, i″ entspricht,

$$\frac{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\Delta+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\delta+1}{\Delta}.$$

Es ist also das Maximum der Differenz (1)

$$=\frac{\delta+1}{\Delta}-\frac{\delta}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}.$$

Zweiter Fall. Um die größte Grenze der Differenz (2) zu finden, hat man das Minimum des Ausdruckes

$$\frac{\delta+i''-i}{\Delta+i'-i}$$

zu bestimmen.

Durch ein Raisonnement, welches dem im vorhergehenden Falle ähnlich, aber umgekehrt ist, erhält man für das Minimum dieses Ausdruckes, welches den Veränderungen der drei Größen i, i′, i″ entspricht,

$$\frac{\delta-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\Delta-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\delta-1}{\Delta}*.$$

---

* Um nämlich den kleinsten Werth des Ausdruckes

$$\frac{\delta+i''-i}{\Delta+i'-i}$$

in Bezug auf die Veränderung von i zu erhalten, welche Größe im Zähler und Nenner dieses Bruches vorkommt, substituirt man $-i=-\frac{1}{2}$, und findet das Minimum

$$\frac{\delta-\frac{1}{2}+i''}{\Delta-\frac{1}{2}+i'}.$$

Um hierauf den kleinsten Werth dieses Ausdruckes in Bezug auf die Veränderungen der Größen i″ und i′ zu finden, substituirt man in seinem Zähler $i''=-\frac{1}{2}$, in seinem Nenner $i'=+\frac{1}{2}$, und findet für das Minimum des obigen Ausdruckes, welches den Veränderungen der Größen i, i′, i″ entspricht,

$$\frac{\delta-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\Delta-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\delta-1}{\Delta}.$$

Es ist also das Maximum der Differenz (2)

$$= \frac{\delta}{\triangle} - \frac{\delta - 1}{\triangle} = \frac{1}{\triangle};$$

wornach somit endlich die gesuchte Grenze des begangenen Fehlers in beiden Fällen $\frac{1}{\triangle}$ beträgt.

Diese Größe wächst in dem Maße, als man in den Logarithmentafeln vorwärts schreitet, weil $\triangle$ in demselben Maße abnimmt (§. 106).

§. 111.

Nunmehr ist leicht zu beweisen, daß von den zwei Ursachen des Fehlers, welche wir (§. 106) bezeichnet haben, bloß die zweite berücksichtigt zu werden braucht.

In der That, da bei der ersten Aufgabe (den Logarithmen einer gegebenen Zahl zu bestimmen) die Ungenauigkeit der Proportion auf die letzte Ziffer der in den Tafeln enthaltenen Logarithmen keinen Einfluß haben kann (§. 109), so darf man die Proportion als ganz genau ansehen, und nur die Ungenauigkeit der in den Tafeln enthaltenen Logarithmen in Rechnung bringen, insofern die letzte Decimalstelle derselben um eine Einheit zu groß, oder zu klein seyn kann (§. 110).

Bei der zweiten Aufgabe (die einem gegebenen Logarithmen entsprechende Zahl zu bestimmen) hängt die Grenze des Fehlers, welcher von der Ungenauigkeit der in den Tafeln enthaltenen Logarithmen herrührt, nur von der logarithmischen Differenz $\triangle$ der Tafeln (§. 109), und folglich von den letzten Ziffern dieses Logarithmen ab, auf welche die Ungenauigkeit der Proportion keinen Einfluß hat, woraus wieder folgt, daß die erste Ursache des Fehlers ganz und gar vernachläßigt werden kann.

§. 112.

Es bleibt jetzt noch übrig, die vorhergehende Theorie auf die Logarithmentafeln, z. B. auf die von Callet, anzuwenden.

Erste Aufgabe. Die Proportion

$$1 : d = \triangle : x, \text{ woraus } x = d\triangle,$$

verschafft die sieben ersten Decimalen bis auf eine Einheit der siebenten Decimalstelle genau (§. 110).

Eine Summe von Logarithmen, oder logarithmischen Complementen kann also um eine Größe fehlerhaft seyn, deren Grenze durch so viele Einheiten der siebenten Decimalstelle ausgedrückt ist, als es Summanden sind. Multiplicirt man ferner, um den Logarithmen einer Potenz zu erhalten, den Logarithmen des Dignanden mit dem Exponenten der Potenz, so kann das Resultat um so viele Einheiten der siebenten Decimalstelle fehlerhaft seyn, als der Exponent Einheiten enthält. Anders verhält es sich aber beim Logarithmiren einer Wurzelgröße, weil der Fehler, mit welchem der Logarithme des Dignanden behaftet ist, durch den Wurzelexponenten dividirt wird.

Zweite Aufgabe. Die Proportion

$$\triangle : \delta = 1 : y, \text{ woraus } y = \frac{\delta}{\triangle},$$

verschafft den Werth der gesuchten Zahl bis auf den Bruch $\frac{1}{\triangle}$ genau (§. 110).

Da man aber $\frac{\delta}{\triangle}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln pflegt, so fragt es sich, bis zu welcher Decimalstelle diese Transformation fortgesetzt werden soll.

Es sey α die Potenz von 10, welche den Nenner des erhaltenen Decimalbruches ausdrückt. Bemerken wir auch, daß man sich beim Verwandeln von $\frac{\delta}{\triangle}$ in einen Decimalbruch ferner aussetzt, einen Fehler zu begehen, dessen Grenze $= \frac{1}{2\alpha}$, d. i. gleich der Hälfte von der Einheit der letzten Decimale, ist. Man hat demnach folgender Ungleichheit zu genügen:

$$\frac{1}{\triangle} + \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{\alpha}, \text{ woraus } \frac{1}{\triangle} < \frac{1}{2\alpha},$$

$$\text{und also } \triangle > 2\alpha.$$

Es muß somit $\triangle$ wenigstens das Doppelte der Potenz von 10 betragen, bei der die Transformation aufhört.

Nun erhellt aus der Betrachtung der Logarithmentafeln von

Callet, daß bis zur Zahl 21809 die logarithmische Differenz der Tafeln nie kleiner als 200 ist. Man kann daher für alle Zahlen von 10000 bis 21809 die Verwandlung von $\frac{\delta}{\Delta}$ in einen Decimalbruch bis zu den 100teln fortsetzen und alsdann mit Sicherheit auf die Genauigkeit der letzten Ziffer rechnen.

Von der Zahl 21809 bis zur Zahl 100000, für welche letztere die logarithmische Differenz der Tafeln 44 beträgt, kann man mit Sicherheit nur auf die Genauigkeit der Ziffer der 10tel rechnen.

Von der Zahl 100000 bis zur Zahl 108000 ändert sich die logarithmische Differenz der Tafeln von 434 bis 403 (welche zwei Zahlen größer als 200 sind) und man kann daher wieder mit Sicherheit auf die Genauigkeit der Ziffer der 100tel rechnen.

Druckfehler.

Seite	Zeile	
12,	5	v. o. l. §. 8 st. §. 7.
12,	4	v. u. l. §. 8 st. §. 7.
13,	11	v. u. l. §. 9 st. §. 8.
13,	10	v. u. l. §. 10 st. §. 9.
14,	10	v. o. l. §. 9 st. §. 8.
14,	12	v. o. l. §. 10 st. §. 9.
15,	4	v. o. l. §. 9 st. §. 8.
15,	6	v. o. l. §. 10 st. §. 9.
15,	22	v. o. l. §. 12 st. §. 11.
20,	4	v. u. l. x st. y.
20,	5	v. u. l. y st. x.
24,	17	v. o. l. $\frac{1}{5}$ st. $\frac{1}{3}$.
27,	2	v. o. l. $\sqrt{2y^2 + x^2}$ st. $\sqrt{2y^2} + x^2$.
32,	7	v. u. l. $\sqrt{11 + 3 . 1 + 2 . 1^2}$ st. $\sqrt{11} + 3 . 1 + 2 . 1^2$.
32,	5	v. o. l. $\frac{p}{q}$ st. $\frac{p}{p}$.
47,	5	v. o. l. $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1 . 2 . 3 \ldots m}$ st. $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1 . 2 . 3 \ldots m}$.
48,	16	v. o. l. $n(n-1)(n-2)(n-3)$ st. $(n-1)(n-2)(n-3)$.
48,	19	v. o. l. $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ st. $(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.
86,	5	v. u. l. $\frac{a_2}{a_2 + b_2}$ st. $\frac{a_2}{a_2 \times b_2}$.
93,	3	v. o. l. oder st. und.
111,	6	v. u. l. $\frac{(l + a)(l - a)}{2s - l - a}$ st. $\frac{(l + a)(l - a)}{2s - l - e}$.
115,	9	v. o. l. $= e^n$ st. $= e$.
118,	7	v. o. l. $= a^3 + b^3 + c^3 + \ldots$ st. $= a^3 + b^3 + b^3 + \ldots$
118,	22	v. o. l. $3(s_2 - n^2)$ st. $3(s - n^2)$.
124,	3	v. o. l. $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}$ st. $+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}$.
125,	4	v. o. l. die Summe st. der Summe.
137,	11	v. o. l. $1540 - 220 = 1320$ st. $1520 - 220 = 1300$.
144,	13	v. o. l. $< n$ st. $> n$.
147,	17	v. o. l. $\cos n\varphi, (\sin \varphi)^n$ st. $\cos n\varphi (\sin \varphi)^n$.
165,	8	v. o. l. 1699011 st. 1699911.
170,	5	v. u. l. $y =$ st. $y -$.
179,	5	v. o. l. $\pm \sqrt{-1}$ st. $\mp \sqrt{-1}$.
181,	7	v. o. l. Divisoren st. Divisionen.
187,	10	v. o. l. $3p\alpha^2 x$ st. $p\alpha^2 x$.
192,	14	v. o. l. Bemerken st. Bedenken.
193,	13	v. o. l. $= (\ldots)$ st. $- (\ldots)$.
200,	7	v. o. l. $\frac{3}{4}\rho^2 x$ st. $\frac{3}{4}\rho^2$.
201,	5	v. o. l. setzen st. sehen.
210,	3	v. o. l. Theiler st. Theile.
220,	5	v. o. l. $n + \frac{q}{q}$ st. $n + \frac{p}{q}$.
221,	6	v. o. l. $n + d$ st. $n + \delta$.

In demselben Verlage sind folgende empfehlenswerthe Schriften erschienen:

Arneth, Dr. A., System der **Geometrie**, Lehrbuch für akademische Vorträge und Unterrichts-Anstalten. Von den geraden Linien in der Ebene; 1. und 2. Abtheilung, mit 7 Tafeln in Quer-Folio. fl. 2. — R. 1. 6 ggr.

Leroy, C. F. A., analytische Geometrie im Raum, enthaltend die Flächen zweiter Ordnung, nebst der allgemeinen Theorie der krummen Flächen und der Linien von doppelter Krümmung. Uebersezt nach der zweiten, verbesserten und vermehrten Auflage von C. F. Kauffmann. Mit 5 Tafeln in Quart. fl. 2. 12 kr. R. 1. 9 ggr.

Nädelin, Präceptor, hundertvierundsechszig **kalligraphische Vorlegeblätter** für Volksschulen. fl. 1. 24 kr. — 22 ggr.

— — methodische Anleitung **zum Schön- und Schnellschreiben** nach Carstairs'schen Grundsätzen, für Elementarschulen wie für lateinische und Realanstalten. 40 Seiten Text mit 87 Vorschriften. Quer-Octav. fl. 1. 48 kr. R. 1. 4 ggr.

Weitbrecht, Konrad, Ornamenten-Zeichnungsschule, 100 Blätter Median-Format in 5 Heften. fl. 20. — R. 13. —

Einzelne Hefte werden zu nachstehenden Preisen abgegeben:

1. Heft	fl. 2. 45 kr.	R. 1. 20 ggr.	4. Heft fl. 5. 30 kr.	R. 3. 16 ggr.
2. „	„ 3. 15 „	„ 2. 4 „	5. „ „ 6. 30 „	„ 4. 8 „
3. „	„ 4. — „	„ 2. 16 „		

Fischer, A., unser Sonnensystem und die Erde als Theil desselben, in fünf großen Darstellungen mit erläuterndem Texte. Ein Hülfsmittel beim geographischen Unterrichte in Gymnasien und Realschulen. 1 Bogen Text gr. 8. und 5 illumin. Tafeln in gr. Median-Folio. fl. 2. — R. 1. 6 ggr.

Volz, K., Fluß- und Gebirgs-Karte von Europa, Deutschland und Schwaben, für den Unterricht bearbeitet. Med.-Folio. Jedes Blatt 8 kr. 2 ggr.

Georgii, L., alte Geographie, beleuchtet durch Geschichte, Sitten, Sagen der Völker und mit vergleichenden Beziehungen auf die neuere Länder- und Völker-Kunde. Nebst einem Anhange, enthaltend die Geographie des Ptolemäus in deutscher Uebersetzung. Lexikon-8.

I. Abtheilung: Asia, Afrika fl. 3. — kr. R. 1. 21 ggr.
II. „ Europa, 1. Heft „ 1. 36 „ „ 1. — „

Hoffmann, W., Beschreibung der Erde, nach ihrer natürlichen Beschaffenheit, ihren Erzeugnissen, Bewohnern und deren Wirkungen und Verhältnissen, wie sie jezt sind. Mit erklärenden Beilagen und Karten. 6 Theile (circa 350 Bogen). fl. 18. — R. 11. —

Schele, A. v., das **Aufnehmen des Terrains** und dessen Darstellung durch Projection horizontaler Flächen, zunächst für den Unterricht an Militär-Bildungsanstalten und zur Selbstbelehrung. Mit 18 lithogr. Folio-Tafeln. fl. 4. — R. 2. 12 ggr.

Buch der **Umgangssprache**; deutsch, englisch, italienisch, französisch. Eine Sammlung von Wörtern, Gesprächen, Redensarten ꝛc. Zum Gebrauche für Reisende und zum Selbstunterrichte.

broschirt fl. 1. 12 kr. R. — 18 ggr.
gebunden „ 1. 24 „ „ — 21 „

Deyhle, C. F., vollständiges **französisch-deutsches Wörterbuch** in etymologischer Ordnung, mit einem das Nachschlagen erleichternden Register. Neue Ausgabe in 4 Lieferungen. fl. 1. — — 15 ggr.

Gérard, praktische und vollständige **Sprachlehre** zum Gebrauch für Deutsche, welche französisch lernen wollen. 3 Bände. fl. 6. 24 kr. R. 4.—

— — Abrégé de la **Grammaire française** par demandes et par réponses, sur le plan de la Grammaire de *Noël* et *Chapsal*. 48 kr. 12 ggr.

— — **Auszug** aus der **biblischen Geschichte**, ein Elementarbuch für die deutsche Jugend, welche die französische Sprache zu erlernen anfängt, mit beigefügten erläuternden Noten und angehängter Abhandlung über praktische Orthographie. 36 kr. 9 ggr.

Leber, A., Elementarbuch der **lateinischen Sprache**, enthaltend die Elementargrammatik, nebst zahlreichen lateinischen und deutschen Uebungsstücken, nach einer naturgemäßen Stufenfolge eingerichtet und mit einem Wörterverzeichnisse versehen. fl. 1. 30 kr. — 22 ggr.

— — Handbuch der **französischen Sprache** und **Literatur**, enthaltend eine Uebersicht der französischen Literaturgeschichte nebst zahlreichen klassischen Musterstücken in Poesie und Prosa, nach Fächern geordnet. 2 Bände. Jeder Band fl. 2. — R. 1. 16 ggr.

Poole, Paul Pry, der Ueberlästige, Lustspiel in drei Aufzügen. Zur Uebung im Englischen, besonders in der englischen Unterhaltungssprache mit deutscher Uebersetzung, nebst ausführlichen sprachlichen Erläuterungen und zahlreichen beigefügten Uebungsbeispielen, bearbeitet von **Fr. Gruner.** 48 kr. 12 ggr.

Théâtre de l'adolescence, ou choix de pièces dramatiques destinées à cet âge, extraites des ouvrages de Mad. *de la Faye-Bréhier*, *de Berquin* et autres par **l'Abbé Mozin.** 3 Volumes. fl. 2. 24 kr. R. 1. 12 ggr.

Der erste Band enthält: *le polichinel*, *le petit précepteur*, *la lettre et la chanson*, *la petite médisante*, *les petits heritiers*; der zweite: *le maitre d'écriture*, *le procès*, *Racine en famille*, *un bon coeur fait pardonner bien des étourderies*, *l'échange*; der dritte: *le bon fils*, *la vanité punie*, *la levrette et la bague*, *les petites couturières*, *le congé*, *papa gateau.*

Jeder Band wird einzeln abgegeben.

Zoller, K. A., französisches Sprachbuch. Eine Anleitung, die französische Sprache zu lehren und zu lernen. Nach neuem methodischem Gange. 3 Theile.

1. Theil: für Anfänger aus dem jüngeren Alter. Dritte vermehrte Auflage. 54 kr. 12 ggr.

2. Theil: für Anfänger aus dem jüngeren Alter. Zweite, ganz überarbeitete und vermehrte Auflage. fl. 1. 12 kr. — 18 ggr.

3. Theil (auch unter dem Titel **französische Aehrenlese**) für die Stufe der Vorgerückten. Eine Zugabe zur zweiten ganz überarbeiteten und vermehrten Auflage. fl. 1. 12 kr. — 18 ggr.

Zoller, K. A., **Lehrbibel** für Haus und Schule, oder Lehren der heiligen Schrift, nach den Bibelbüchern zusammengestellt in mehr als neuntausend biblischen Aussprüchen. 48 kr. 12 ggr.

Bischoff, Dr. G. W., Lehrbuch der **Botanik**.

Allgemeine Botanik in 3 Abtheilungen, mit 16 Tafeln in 4. und vielen Holzschnitten. cart. fl. 12. 48 kr. R. 8. —

Specielle Botanik, in 2 Abtheilungen „ fl. 8. — R. 5. —

— — **Wörterbuch** der beschreibenden **Botanik**, oder die Kunstausdrücke, welche zum Verstehen der phytographischen Schriften nothwendig sind. Lateinisch-deutsch und deutsch-lateinisch bearbeitet, alphabetisch geordnet und erklärt. fl. 1. 36 kr. R. 1. —

Blum, Dr. J. R., **Lithurgik** oder Mineralien und Felsarten, nach ihrer Anwendung in ökonomischer, artistischer und technischer Hinsicht systematisch abgehandelt. Mit 53 Figuren und 3 Stahlstichen. cart. fl. 3. 12 kr. R. 2. —

— — die **Pseudomorphosen** des Mineralreichs. Mit 17 eingedruckten Holzschnitten. fl. 3. 12 kr. R. 2. —

— — Lehrbuch der **Oryktognosie**, mit 261 krystallographischen Figuren. cart. fl. 3. 12 kr. R. 2. —

Bronn, Dr. H. G., Handbuch einer **Geschichte der Natur**.

Erster Band. Einleitung. — I. Theil: Kosmisches Leben. — II. Theil: Tellurisches Leben. Mit VI Tafeln und 23 eingedruckten Holzschnitten. fl. 3. 12 kr. R. 2. —

Zweiter Band. III. Theil: Organisches Leben. Ergebnisse, hauptsächlich aus der lebenden Welt über Entwickelung, Verbreitung und Untergang der früheren Bevölkerungen der Erde. Mit I Tafel. fl. 4. 48 kr. R. 3. —

Leonhard, K. C. v., Lehrbuch der **Geognosie** und **Geologie**. Nebst 8 Tafeln mit illuminirten und schwarzen Abbildungen und mehreren Gubitz'schen Holzschnitten. cart. fl. 6. 24 kr. R. 4. —

— — **Geologie** oder Naturgeschichte der Erde auf allgemein faßliche Weise abgehandelt. 1—4. Band, mit 80 Stahlstichen, Lithographien und einer Menge eingedruckter Vignetten. geh. fl. 17. 36 kr. R. 11. 16 ggr.
in Leinwand gebunden „ 19. 12 „ „ 12. 6 „

— — **geologischer Atlas** zur Naturgeschichte der Erde. Mit 10 Karten und 1 Tafel mit Profilen. Quer-Quart. fl. 3. — R. 1. 20 ggr.

Leuckart, Dr. F. S., allgemeine **Einleitung** in die **Naturgeschichte**. br. fl. 1. — — 15 ggr.

Voigt, Dr. F. S., Lehrbuch der **Zoologie.** 6 Bände, mit 22 Kupfertafeln in 4. cart. fl. 17. 36 kr. R. 11. —

Schinz, Dr. H., europäische Fauna, oder Verzeichniß der Wirbelthiere Europa's. 2 Bände. fl. 6. 12 kr. R. 3. 21 ggr.

Zawadzki, Dr. A., Fauna der **galizisch-bukowinischen Wirbelthiere.** Eine systematische Uebersicht der daselbst vorkommenden Säugthiere, Vögel, Amphibien und Fische. fl. 1. 12 kr. — 18 ggr.

Metzger, J., Gesetze der **Pflanzen-** und **Mineralienbildung** angewendet auf altdeutschen Baustyl. Nebst einem Titelblatt und 8 lithographirten Tafeln. Lexicon-8. 48 kr. 12 ggr.

Artaud und de la Salle, Geschichte und Beschreibung von **Italien und Sizilien.** Aus dem Französischen. Mit 120 Kupfern und 2 Karten. geb. fl. 3. 48 kr. R. 2. 9 ggr.

Champollion-Figeac, Geschichte und Beschreibung von **Egypten.** A. d. Fr. Mit 22 Kupfern und 1 Karte. geb. fl. 4. — R. 2. 12 ggr.

Denys und **Famin,** Geschichte und Beschreibung von **Brasilien, Columbien** und **Guyana.** A. d. Fr. Mit 100 Stahlstichen und 2 Karten. geb. fl. 3. 12 kr. R. 2. —

Golbéry, v., Geschichte und Beschreibung der **Schweiz** und **Tyrols.** A. d. Fr. Mit 92 Kupfern und 1 Karte. geb. fl. 4. — R. 2. 12 ggr.

Lebas, M., Geschichte und Beschreibung von **Schweden** und **Norwegen.** Aus dem Französischen. Mit 60 Stahlstichen und 1 Karte. geb. fl. 3. 36 kr. R. 2. 6 ggr.

Rienzi, D. v., Geschichte und Beschreibung von **Oceanien.** A. d. Fr. 3 Bände mit 268 Stahlstichen und 5 Karten. geb. fl. 10. — R. 6. 6 ggr.

Roux de Rochelle, Geschichte und Beschreibung der **vereinigten Staaten von Nordamerika.** A. d. Fr. Mit 96 Stahlstichen und 1 Karte. geb. fl. 3. 36 kr. R. 2. 6 ggr.

Pauthier, M. G., Geschichte und Beschreibung von **China.** Aus dem Französischen. Mit 72 Kupfern und 1 Karte. geb. fl. 3. 24 kr. R. 2. 3 ggr.

Pouqueville, Geschichte und Beschreibung von **Griechenland.** A. d. Fr. Mit 112 Kupfern und 2 Karten. geb. fl. 3. 36 kr. R. 2. 6 ggr.

Pfaff, K., Fürstenhaus und Land **Württemberg** nach den Hauptmomenten, von der ältesten bis auf die neueste Zeit. Eine Festgabe zur Jubelfeier. fl. 1. — — 15 ggr.

Schmid, J. C. v., schwäbisches Wörterbuch, mit etymologischen und historischen Anmerkungen und dem Bildnisse des Verfassers. Neue wohlfeilere Ausgabe in vier Heften. fl. 4. — R. 2. 12 ggr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lefébure de Fourcy, Louis Etienne / Vincent, Alexandre-Joseph-Hyacinthus /
Ritter, L. F.

Neun Abhandlungen über eben so wichtige als interessante Gegenstände aus
der Algebra und niedern Analysis Für höhere Lehranstalten, sowie vorzü
glich zum Selbstunterrichte

Stuttgart 1844

Math.p. 2 c
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081359-8